V2B3: Einführung in die Komplexe Analysis

Pavel Zorin-Kranich
Universität Bonn
Sommersemester 2020

Ein klassisches Ziel der komplexen Analysis besteht darin, spezielle Funktionen, wie z.B. exp, ln, Γ, Riemannsche ζ-Funktion, Besselfunktionen, und andere, zu untersuchen. Sie ist aber auch fundamental für andere Gebiete, wie z.B. Fourieranalysis, und, allgemeiner, Spektraltheorie.

Die Funktion dieses Skripts besteht darin, die Ergebnisse und Argumente darzustellen die Sie aus diesem Kurs mitnehmen sollten. Viele Beweise die nur Ideen aus Analysis 1 und 2 benutzen werden gekürzt oder weggelassen; ich verweise auf die zahlreichen guten Lehrbücher über komplexe Analysis. Folgende empfehle ich besonders:

- W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*. Der große Vorteil dieses Buchs besteht darin, dass es am wenigsten ausschweifend ist. Die im Inhaltsverzeichnis grau hinterlegten Kapitel decken die wichtigsten Inhalte dieses Kurses ab und enthalten fast nichts Überflüssiges.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*. Finde ich sprachlich am Schönsten.
- R. Remmert, *Funktionentheorie 1*. Dieses Buch enthält umfangreiche historische Informationen. Ich empfehle diese anzuschauen auch wenn Sie einen anderen Text als Hauptreferenz verwenden.
- R. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Wie der Titel sagt, ordnet dieses Buch einige Ergebnisse der komplexen Analysis in einen breiteren Kontext in der reellen Analysis ein. Wir werden dies an den Beispielen Fouriertransformation, Interpolation, und Funktionalkalkül sehen.

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen und komplexe Differenzierbarkeit

1.1 Die Menge der komplexen Zahlen

Definition 1.1. *Die Menge der Komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$ *ist die Menge* $\mathbb{R}^2$*, mit der zusätzlichen Operation* $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$*. Man identifiziert* $\mathbb{R}$ *mit* $\mathbb{R}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$*, und schreibt* $(0,1) = i$ *für die* imaginäre Einheit*.*

Bemerkung. Mit dieser Identifikation gilt $(a,b) = a + ib$.

Bemerkung. Es gilt $i^2 = (0,1)^2 = (0,-1)^2 = (-1,0) = -1$.

Satz 1.2. $\mathbb{C}$ *ist ein Körper.*

Das bedeutet, dass die Vektorraumoperation $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und die oben eingeführte Multiplikation* $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *folgende Eigenschaften haben (wobei* $1 = (1,0)$ *und* $0 = (0,0)$*):*

(i) Addition und Multiplikation sind kommutativ*, d.h.,* $z+w = w+z$ *und* $z\cdot w = w\cdot z$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$*.*

(ii) Addition und Multiplikation sind assoziativ*, d.h.,* $(z+w)+v = z+(w+v)$ *und* $(z\cdot w)\cdot v = z\cdot(w\cdot v)$ *für alle* $z, w, v \in \mathbb{C}$*.*

(iii) $0 + z = z$ *und* $1\cdot z = z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*.*

(iv) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ *gibt es ein* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $z + x = w$*; für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *mit* $z \neq 0$ *gibt es ein* $x \in \mathbb{C}$ *mit* $zx = w$*.*

(v) Es gilt das Distributivgesetz, d.h., $z\cdot(w+v) = (z\cdot w) + (z\cdot v)$*.*

$\mathbb{R}$ *ist ein Unterkörper von* $\mathbb{C}$*, die verschiedenen eingeführten Multiplikationen (Produkt* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, Vektorraumoperation* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*, komplexe Multiplikation* $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$*) sind miteinander kompatibel.*

Wir führen mehrere Beweise, die verschiedene Blickwinkel auf $\mathbb{C}$ erlauben.

Beweis 1. Eine schnelle Möglichkeit diesen Satz zu beweisen besteht darin, ihn auf bereits bekannte Aussagen über Matrizen zu reduzieren. Es gilt

$$\mathbb{C} \cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.1}$$

mit dem Isomorphismus $(a,b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (Übungsaufgabe). Matrizen solcher Form heißen *konform*, weil sie wikelerhaltende lineare Abbildungen definieren. Man beachte dabei dass

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2,$$

sodass Matrizen dieser Form genau dann invertierbar sind wenn sie nicht verschwinden. $\square$

Beweis 2. Man kann die Körperaxiome von Hand überprüfen. Die einzige Schwierigkeit dabei besteht darin, die multiplikative Inverse von $a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zu finden. Dies geht wie folgt.

Zuerst kann man ausrechnen dass $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ gilt. Wenn wir bereit wüssten dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist, so würde folgen dass

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{1.2}$$

Nun kann man überprüfen dass dies, mit unserer definition der Multiplikation, tatsächlich die multiplikative Inverse von $a + ib$ ist. □

Beweis 3. Aus algebraischer Perspektive haben wir $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/\left\langle x^2 + 1\right\rangle$, mit dem Isomorphismus $(a, b) \mapsto a + bx$. □

Definition 1.3. *Man schreibt* $\mathrm{Re}(a, b) = a$ *für den* Realteil *und* $\mathrm{Im}(a, b) = b$ *für den* Imaginärteil. *Der* Betrag *auf* $\mathbb{C}$ *ist die Euklidische Norm von* $\mathbb{R}^2$, $|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2}$. *Die* komplexe Konjugation *ist definiert durch* $\overline{(a, b)} := (a, -b)$.

Lemma 1.4. *Es gilt* $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $\mathrm{Re}\, z = (z + \overline{z})/2$, $\mathrm{Im}\, z = (z - \overline{z})/(2i)$, $|zw| = |z|\,|w|$.

Bemerkung. Die Menge $\mathbb{C}$ ist, anders als $\mathbb{R}$ und seine Teilmengen, *nicht* total geordnet (vgl. Übungsaufgabe).

Die Menge $\mathbb{C}$ mit dem Betrag ist ein normierter Vektorraum (über dem Grundkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Wir rufen einige wichtige Definitionen und Aussagen in Erinnerung.

Definition 1.5. *Eine Folge* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *ist eine Cauchy-Folge wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $k \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$\forall n, m \geq k \text{ gilt } |z_n - z_m| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Die Folge $(z_n)_n$ *konvergiert gegen* $w \in \mathbb{C}$ *wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $k \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$\forall n \geq k \text{ gilt } |z_n - w| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Lemma 1.6. $\mathbb{C}$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Definition 1.7. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *und* $r > 0$ *gilt*

$$B_r(z) = D_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}, \tag{1.5}$$

und

$$\overline{B}_r(z) = \overline{D}_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}. \tag{1.6}$$

Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ist offen, wenn für alle* $z \in \Omega$ *ein* $r > 0$ *existiert, so dass* $B_r(z) \subseteq \Omega$.

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *ist in* $z \in \Omega$ *stetig, wenn*

$$f(z) = \lim_{w \to z} f(w), \tag{1.7}$$

d.h., wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *so dass*

$$\forall w \in B_\delta(z) \text{ gilt } |f(w) - f(z)| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

1.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Definition 1.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. Die Funktion f heißt* komplex differenzierbar in z *falls*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{1.9}$$

existiert. Man bezeichnet den Grenzwert mit $f'(z)$. Die Funktion f heißt holomorph in Ω *wenn sie in jedem Punkt $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.*

Bemerkung. Die Eigenschaft einer Funktion in einer offenen Menge komplex differenzierbar zu sein hat, wie wir sehen werden, weitreichende Konsequenzen, und verdient deshalb einen eigenen Namen.

Bemerkung. Das bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\forall h \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < |h| < \delta \text{ gilt } \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon\,. \tag{1.10}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall h \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 \leq |h| < \delta \text{ gilt } |f(z+h) - f(z) - f'(z)h| \leq \varepsilon |h|. \tag{1.11}$$

Beispiel. $f(z) = z$ ist holomorph, mit $f'(z) = 1$ für alle z. $g(z) = \overline{z}$ ist nirgendwo komplex differenzierbar.

Folgende Aussagen werden genauso wie im reellen Fall bewiesen.

Lemma 1.9. *$f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar, wenn eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ existiert, so dass $f(w) = f(z) + \varphi(w)(w - z)$ und φ in z stetig ist.*

Bemerkung. Daraus folgt sofort: Falls $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in z komplex differenzierbar ist, dann ist f in z stetig.

Lemma 1.10. *Falls $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar sind, so sind es auch $f + g$ und fg; falls $g(z) \neq 0$ auch f/g. Es gilt $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = fg' + f'g$, $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$. Falls $f : \Omega \to U$ in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist, und $g : U \to \mathbb{C}$ in $w = f(z)$, dann ist $g \circ f$ in z komplex differenzierbar, mit $(g \circ f)' = g' \circ f f'$.*

Bemerkung. Es folgt leicht, dass alle Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

Satz 1.11. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \in \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f ist in z komplex differenzierbar;

(ii) f ist in z reell differenzierbar (d.h., als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) und $Df(z)$ ist $\mathbb{C}$-linear;

(iii) f ist in z reell differenzierbar (d.h., als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) und $Df(z)$ erfüllt die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 \text{ und } \partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2, \tag{1.12}$$

wobei $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$.

Eine Abbildung $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ist $\mathbb{C}$-linear falls eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $Ah = wh$ für alle $h \in \mathbb{C}$. Dabei ist Ah das Matrix-Vektor Produkt, und wh das $\mathbb{C}$-Produkt.

Bemerkung. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen können auch als

$$(Df_1)^T = J(Df_2)^T \tag{1.13}$$

geschrieben werden, wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Rotation um 90 Grad darstellt, und $(Df_i)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f_i \\ \partial_2 f_i \end{pmatrix}$.

Beweis. Ählich zu (1.11), kann reelle Differenzierbarkeit in z dadurch charakterisert werden, dass eine lineare Abbildung $Df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert, sodass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\forall h \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 \le |h| < \delta \text{ gilt } |f(z+h) - f(z) - Df(z)(h)| \le \varepsilon |h|. \tag{1.14}$$

Um (i) $\implies$ (ii) zu zeigen, nehmen wir (1.11) an, und sehen dass (1.14) mit der linearen Abbildung $Df(z)(h) := f'(z)h$ gilt.

Um (ii) $\implies$ (i) zu zeigen, nehmen wir (1.14) an, wobei $Df(z)$ von der Form $Df(z)(h) = wh$ ist, und sehen dass (1.11) mit $f'(z) = w$ gilt.

Um die Äquivalenz von (ii) und (iii) zu zeigen, benutzen wir den Isomorphismus (1.1). Die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.12) sagen gerade dass $Df(z)$ durch eine konforme Matrix gegeben ist. □

1.2.1 Harmonische Funktionen

Definition 1.12. *Eine Funktion $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, heißt harmonisch wenn*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = 0\,. \tag{1.15}$$

Lemma 1.13. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei zusätzlich $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ (als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$). Dann ist f harmonisch.*

Bemerkung. Wir werden sehen, dass die Annahme $f \in C^2$ redundant ist, da jede holomorphe Funktion glatt ist.

Beweis. Wir wissen, dass $\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2$ und $\partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2$. Wir differenzieren (reell!) die erste Bedingung nach x_1, und die zweite nach x_2 und erhalten

$$\partial_1^2 f_1 = \partial_1 \partial_2 f_2, \quad \partial_2^2 f_1 = -\partial_2 \partial_1 f_2. \tag{1.16}$$

Da $f_2 \in C^2$ folgt $\partial_1 \partial_2 f_2 = \partial_2 \partial_1 f_2$, und das impliziert $\partial_1^2 f_1 + \partial_2^2 f_1 = 0$.

Wenn wir stattdessen die erste Gleichung nach x_2 und die zweite nach x_1 differenzieren, bekommen wir die analoge Aussage für f_2. □

Umgekehrt stimmt jede harmonische Funktion lokal mit einer Komponente einer holomorphen Funktion überein.

Lemma 1.14. *Sei $\Omega = I \times J \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck, $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ harmonisch. Dann gibt es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ sodass $(u, v) : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

Bemerkung. Die Aussage ist für allgemeinere Mengen Ω korrekt, aber nicht für jede offene Menge. Ein Beispiel in dem keine derartige Funktion v existiert ist wie folgt: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$, $u(z) = \log|z|$. Wir werden dieses Phänomen genauer verstehen wenn wir die komplexe Logarithmusfunktion anschauen.

Beweis. Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ durch $g = (-\partial_2 u, \partial_1 u)$ definiert. Da u harmonisch ist, folgt $\operatorname{curl} g := \partial_1 g_2 - \partial_2 g_1 = 0$. Deshalb gibt es $v \in C^2(\Omega)$ mit $Dv = g$ (Analysis 2). Dann erfüllt $(v, u)^T \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ die C-R Differentialgleichungen und ist deshalb holomorph. □

Dabei haben wir (ohne Beweis) folgende Aussage aus Analysis 2 benutzt:

Satz 1.15. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck, $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ so dass $Dg = Dg^T$. Dann gibt es $v \in C^2(\Omega)$ mit $g = (Dv)^T$.*

2 Analytische Funktionen, Potenzreihen

Satz 2.1 (Konvergenzradius). *Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen,*

$$R := \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} \in [0, \infty], \tag{2.1}$$

wobei $0^{-1/n} := \infty$. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

konvergiert absolut falls $|z| < R$, und divergiert falls $|z| > R$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ so dass $(L + \varepsilon)|z| = \lambda < 1$, wobei $L = 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. Dann gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Deshalb gilt für $n \geq n_\varepsilon$

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\, |z|^n \leq ((L + \varepsilon)|z|)^n = \lambda^n\,. \tag{2.3}$$

Da die geometrische Reihe $\sum_n \lambda^n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum |a_n z^n|$.

Falls $|z| > R$ wählen wir $\varepsilon > 0$ so dass $(L - \varepsilon)|z| = \lambda > 1$. Dann gibt es unendlich viele Werte von n mit $|a_n|^{1/n} > L - \varepsilon$, und deshalb unendlich viele Werte von n mit $|a_n z^n| \geq ((L - \varepsilon)|z|)^n = \lambda^n$. Deshalb kann die Reihe nicht konvergieren. (Erinnerung: für jede konvergente Reihe $\sum a_n z^n$ gilt $a_n z^n \to 0$).

Die Fälle $R = 0$, $R = \infty$ brauchen bei einigen Schritten eine getrennte Behandlung. □

Bemerkung. Im Fall $|z| = R$ ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich.

Beispiel. $\sum \frac{1}{n!} z^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 2.2. *Seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und R wie in (2.1), $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ durch*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.4}$$

definiert. Dann ist f holomorph und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{2.5}$$

Diese zweite Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius. Insbesondere ist f in B_R beliebig oft komplex differenzierbar, und alle Ableitungen sind holomorph.

Beweis. Aus $\lim n^{1/n} = 1$ folgt, dass die beide Potenzreihen denselben Konvergenzradius haben.

Sei R der gemeinsame Konvergenzradius, und sei $g(z) = \sum_n n a_n z^{n-1}$, sei $z \in B_R(0)$.

Wir müssen zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(z+h) - f(z) - hg(z)| \leq \varepsilon |h| \tag{2.6}$$

für alle $h \in B_\delta(0)$ gilt. Wir betrachten zuerst ein einzelnes Monom (diese Rechnung funktioniert für $n \geq 2$, das Ergebnis gilt aber auch für $n \in \{0, 1\}$, da beide Seiten in diesem Fall verschwinden):

$$\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h| &= \Big|\sum_{m=2}^{n} h^m z^{n-m} \binom{n}{m}\Big| \leq \sum_{m=2}^{n} |h|^m |z|^{n-m} \binom{n}{m} \\
&= |h|^2 \sum_{m=2}^{n} |h|^{m-2} |z|^{n-m} \frac{n(n-1)}{m(m-1)} \binom{n-2}{m-2} \\
\leq \frac{n(n-1)}{2} |h|^2 \sum_{m=2}^{n} |h|^{m-2} |z|^{n-m} \binom{n-2}{m-2} &= \frac{n(n-1)}{2} |h|^2 (|h| + |z|)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Nun summieren wir diese Abschätzung in n:

$$\begin{aligned}
|f(z+h) - f(z) - hg(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} |h|^2 (|h| + |z|)^{n-2} \\
&\leq |h|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2},
\end{aligned}$$

wobei $r = |h| + |z|$. Die Summe ist endlich falls $r < R$ nach dem Satz über den Konvergenzradius, da auch $\lim_n (n-1)^{1/n} = 1$. Wir haben also gezeigt dass

$$|f(z+h) - f(z) - hg(z)| \leq C_{|z|+|h|} |h|^2, \tag{2.7}$$

wobei C_r eine monoton steigende Funktion von r ist und $C_r < \infty$ für $r < R$. Die Behauptung folgt mit $\delta := \min((R - |z|)/2, \epsilon / C_{(R+|z|)/2})$. □

Definition 2.3. *Die* Exponentialfuntion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist durch*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{2.8}$$

definiert, und die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\begin{aligned}
\sin(z) &:= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\
\cos(z) &:= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.
\end{aligned}$$

Lemma 2.4. *(i)* $\exp$, $\sin$ *und* $\cos$ *sind holomorph;*

(ii) $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

(iii) $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(iv) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ *für alle* $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Teile 1, 2 mit Satz 2.2. Teil 3 ist eine kleine Rechnung. Teil 4 mit dem Umordnungssatz. □

Satz 2.5 (Umordnungssatz). *(i) Sei* $\sum a_n$ *eine absolut konvergente Reihe,* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Dann ist auch* $\sum a_{\sigma(n)}$ *absolut konvergent, und die Summen sind gleich.*

(ii) Sei $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Dann ist* $\sum_n a_n$ *genau dann absolut konvergent, wenn für alle* $m \in \mathbb{N}$ *die Reihe* $\sum_n a_{\varphi(m,n)}$ *absolut konvergent ist, und* $\sum_m \sum_n |a_{\varphi(m,n)}| < \infty$. *Dann gilt auch* $\sum a_n = \sum_m \sum_n a_{\varphi(m,n)}$.

Bemerkung (Polarkoodinaten). Jeder Punkt in $\mathbb{R}^2$ kann als $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ mit $r \geq 0$ und einem (nicht eindeutig bestimmten) $\theta \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Mit unserer Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ haben wir

$$z := (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\exp(i\theta).$$

Der (nicht eindeutig bestimmte) Parameter θ heißt ein *Argument* von z, das wird zu $\arg z$ abgekürzt. Die Multiplikativität von exp impliziert dass für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ Argumente mit $\arg zw = \arg z + \arg w$ gewählt werden können.

Definition 2.6. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *Eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *heißt* (komplex) analytisch *wenn für alle* $z \in \Omega$ *ein* $r > 0$ *und eine Folge* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *existieren, sodass* $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z)^n$ *auf* $B_r(z)$.

Insbesondere muss die Potenzreihe konvergieren. Mit Satz 2.2 folgt, dass analytische Funktionen beliebig oft differenzierbar sind.

Bemerkung. Analog definiert man *reell analytische* Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Das bekannte Beispiel $f(x) = e^{-1/x}\mathbf{1}_{x>0}$ zeigt dass eine beliebig oft differenzierbare Funktion nicht reell analytisch sein muss.

3 Stammfunktionen, Kurvenintegrale

Definition 3.1 (Stammfunktion). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig. Eine Funktion* $F : \Omega \to \mathbb{C}$ *heißt* Stammfunktion *von* f *falls* F *auf* Ω *holomorph ist und* $F' = f$.

Unser nächstes Ziel besteht darin, zu zeigen dass holomorphe Funktionen Stammfuktionen besitzen. Analog zum Hauptsatz der reellen Integral- und Differentialrechnung kann eine Stammfunktion als ein Integral definiert werden. In diesem Fall wird es ein Kurvenintegral sein.

Definition 3.2 (Kurvenintegral). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *stetig, und* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig differenzierbar. Dann definieren wir*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{3.1}$$

Ist γ *stückweise stetig differenzierbar, d.h., es gibt eine Folge* $a = t_0 < \ldots < t_J = b$ *sodass* $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ *für jedes* j *stetig ist, so definiert man*

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{j=1}^{J} \int_{\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}} f(z)dz.$$

Es ist einfach zu sehen dass diese Definition nicht von der Wahl der Folge (t_j) *abhängt. Eine stückweise differenzierbare Abbildung von einem abgeschlossenen Intervall nach* Ω *nennen wir* Integrationsweg in Ω.

Beispiel. Für $a, b \in \mathbb{C}$ schreiben wir $[a, b]$ für die Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ die durch $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ gegeben ist. Diese Kurve verläuft also in gerader Linie und mit konstanter Geschwindigkeit von a nach b.

Beispiel. Seien γ_1 und γ_2 Integrationswege sodass der Endpunkt von γ_1 mit dem Anfangspunkt von γ_2 übereinstimmt. Dann gibt es einen Integrationsweg $\gamma_1 \cup \gamma_2$ sodass

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

für alle Funktionen f gilt.

Bemerkung. Genau genommen, gibt es viele solche Wege die sich in der Parametrisierung unterscheiden, und wir sollten Äquivalenzklassen von Integrationswegen unter Parametrisierungswechsel betrachen: $\gamma : [a, b] \to \Omega$ und $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \Omega$ sind äquivalent falls eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\phi : [a, b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\phi(a) = \tilde{a}$, $\phi(b) = \tilde{b}$, und $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$ existiert. Um Notation kurz zu halten, wählen wir für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten und benutzen immer diesen.

Lemma 3.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, und $F : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma : [a, b] \to \Omega$*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis. Es reicht dies für jeden differenzierbaren Integrationsweg γ zu zeigen. In diesem Fall ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\big(F(\gamma(t))\big)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \qquad \square$$

Wenn der Integrationsweg γ *geschlossen* ist, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$ und f eine Stammfunktion hat, dann gilt also $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Definition 3.4. *Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt* sternförmig *falls ein $x_* \in \Omega$ existiert sodass für alle $a \in \Omega$ $[a, x_*] \subseteq \Omega$ gilt.*

Beispiel. Jede konvexe Menge ist sternförmig.

Beispiel. $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist sternförmig.

Aus Analysis 2 kennen wir Voraussetzungen unter denen Integration und Ableitungen vertauschen:

Satz 3.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $I = [a, b]$. Sei $g \in C^0(\omega \times I \to \mathbb{R}^m)$, und $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ durch*

$$G(x) = \int_a^b g(x, t)dt \tag{3.2}$$

definiert. Falls $g(x, t)$ als Funktion von x (total) differenzierbar ist, und $Dg \in C^0(\Omega \times I)$, dann ist auch G differenzierbar, und

$$DG(x) = \int_a^b \big(Dg(x, t)\big)dt. \tag{3.3}$$

Im Fall $m = n = 2$ und $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m = \mathbb{C}$ kann man totale reelle Ableitungen in der obigen Aussage durch komplexe Ableitungen ersetzen, da komplexe Differenzierbarkeit $\iff$ (reelle Differenzierbarkeit und Ableitung ist eine konforme Matrix).

Satz 3.6 (Stammfunktion)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph (d.h., überall komplex differenzierbar, mit stetiger Ableitung). Dann besitzt f auf Ω eine Stammfunktion.*

Beweis. Sei $x_* \in \Omega$ wie in der Definition einer sternförmigen Menge. Definiere

$$F(z) := \int_0^1 f(x_* + t(z - x_*))(z - x_*)dt, \quad z \in \Omega. \tag{3.4}$$

Nach Satz 3.5 ist F holomorph und

$$\begin{aligned} F'(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\big(f(x_* + t(z - x_*))(z - x_*)\big)dt \\ &= \int_0^1 f(x_* + t(z - x_*)) + f'(x_* + t(z - x_*))t(z - x_*)dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf(x_* + t(z - x_*)))dt = f(z). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 und der Beweis des Satzes 3.6 zeigen dass (3.1) eine sinnvolle Definition ist.

Korollar 3.7 (Cauchyscher Integralsatz, 1. Version)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{3.5}$$

Diese Aussage wird häufig gebraucht, und deshalb ist es nützlich sie unter leicht schwächeren Voraussetzungen zu zeigen. Es stellt sich heraus dass die Stetigkeitsannahme an f' weggelassen werden kann.

Für $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist $T_{abc} = \operatorname{conv}\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{C}$ das abgeschlossene Dreieck mit den Ecken a, b, c und ∂T_{abc} der Rand. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $T_{abc} \subseteq \Omega$, so ist $\gamma_{abc} := [a, b] \cup [b, c] \cup [c, a]$ ein geschlossener Integrationsweg in Ω.

Satz 3.8 (Lemma von Goursat)**.** *Sei $T = \operatorname{conv}\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $T \subseteq \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph (d.h., in jeder Punkt komplex differenzierbar). Dann ist*

$$\int_{\gamma_{abc}} f(z)dz = 0. \tag{3.6}$$

Beweis. Wir schreiben kurz ∂T für die Parametrisierung des Randes von T.

Wir zerlegen T in vier Dreiecke $T_1, \dots T_4$, die alle isometrische Transformationen von $\frac{1}{2}T$ sind. Durch Zerlegung der Wegintegrale verifizieren wir, dass

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T_i} f(z)dz \tag{3.7}$$

Deshalb gibt es $i \in \{1, \dots, 4\}$ mit

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial T_i} f(z)dz\right|. \tag{3.8}$$

Durch Iterieren erhalten wir eine Folge von Dreiecken

$$T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \dots \tag{3.9}$$

mit

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right|. \tag{3.10}$$

und T_n isometrisch zu $2^{-n}T$. Da $\mathbb{C}$ ein vollständiger metrischer Raum ist, die Folge der Dreiecke T_n verschachtelt ist, $\operatorname{diam}(T_n) = 2^{-n} \operatorname{diam}(T) \to 0$, und alle Dreiecke abgeschlossen sind, haben wir $\cap_n T_n = \{z\}$ mit einem eindeutig bestimmten $z \in \mathbb{C}$.

Da f in z komplex differenzierbar ist, gibt es $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(w) = f(z) + \varphi(w)(w - z) \tag{3.11}$$

und φ in z stetig. Die Funktion $l(w) = f(z) + \varphi(z)(w - z)$ hat die Stammfunktion $w \mapsto f(z)w + \frac{1}{2}\varphi(z)(w - z)^2$ auf $\mathbb{C}$, und deshalb gilt

$$\int_{\partial T_n} l(w)dw = 0$$

für alle n. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T_n} f(w)dw\right| &= \left|\int_{\partial T_n} f(z) + \varphi(w)(w - z) - l(w)dw\right| \\ &= \left|\int_{\partial T_n} (\varphi(w) - \varphi(z))(w - z)dw\right| \\ &\leq L(\partial T_n) \operatorname{diam}(T_n) \sup_{w \in T_n} |\varphi(w) - \varphi(z)|,\end{aligned}$$

wobei $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ die Länge eines Integrationswegs ist. Wir haben $L(\partial T_n) = 2^{-n} L(\partial T)$ und $\operatorname{diam}(T_n) = 2^{-n} \operatorname{diam}(T)$. Mit (3.10) folgt

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \leq L(\partial T) \operatorname{diam}(T) \sup_{w \in T_n} |\varphi(w) - \varphi(z)|. \tag{3.12}$$

Da φ in z stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{w\in T_n} |\varphi(w) - \varphi(z)| = 0$ und damit ist der Beweis beendet. □

Korollar 3.9 (Cauchyscher Integralsatz, 2. Version)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Stammfunktion. Insbesondere gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{3.13}$$

Beweis. Sei $x_* \in \Omega$ wie in der Definition einer sternförmigen Menge und definiere

$$F(z) := \int_{[x_*, z]} f(z)dz, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Man nehme an dass $[z, w] \subseteq \Omega$. Dann folgt aus Sternförmigkeit $T_{x_* zw} \subseteq \Omega$, und aus dem Lemma von Goursat folgt

$$0 = \int_{[x_*,z]} f(z)dz + \int_{[z,w]} f(z)dz + \int_{[w,x_*]} f(z)dz = F(z) + \int_{[z,w]} f(z)dz - F(w),$$

und damit

$$F(w)-F(z)-f(z)(w-z) = \int_{[z,w]} f(z)dz-f(z)(w-z) = (w-z) \int_0^1 (f(z+t(w-z))-f(z))dt.$$

Der Integrand konvergiert gleichmäßig gegen 0 wenn $w \to z$, da f stetig ist. Damit ist $f = F'$. □

Beispiel. Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2 - 2\pi i x\xi)dx = \exp(-\pi\xi^2)$$

Der Fall $\xi = 0$ durch Quadrieren, allgemeine ξ mit Integration von $f(z) = \exp(-\pi z^2)$ über Rechteck mit Ecken $\pm R, \pm R + i\xi$.

4 Die Cauchy-Integralformel

Satz 4.1 (Cauchy-Integralformel). *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subseteq \Omega$. Sei $C : [0, 2\pi] \to \Omega$, $C(\theta) = z_0 + R\exp(i\theta)$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und jedes $z \in B_R(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{4.1}$$

Für den Beweis brauchen wir die Tatsache dass π die kleinste strikt positive Zahl mit

$$\exp(2\pi i) = 1$$

ist. Eine Definition die Sie vielleicht schon gesehen haben ist dass π die kleinste positive Nullstelle von sin oder $\pi/2$ die kleinste positive Nullstelle von cos ist. Die Existenz eines solchen π zeigt man mithilfe der Differentialgleichungen für $\sin, \cos$.

Die Äquivalenz der Definitionen die sin und exp benutzen folgt aus der Tatsache dass, für reelle Zahlen t,

$$\exp(it) = 1 \iff \exp(it/2) \in \{\pm 1\} \iff \sin(t/2) = 0,$$

wobei wir die Multiplikativität von exp, die Identität $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, und die Tatsache dass $\sin(\mathbb{R}), \cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, die aus der Reihendarstellung folgt, benutzt haben.

Beweis von Satz 4.1. Indem wir Ω, f durch $\tilde{\Omega} := \{z - z_0 | z \in \Omega\}$ und $\tilde{f}(z) := f(z + z_0)$ ersetzen, können wir $z_0 = 0$ annehmen. Der Integrationsweg ist dann $C(\theta) = R\exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Zuerst betrachten wir den Fall $f \equiv 1$. Für $z = 0$ haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R\exp(i\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(R\exp(i\theta))d\zeta = 1.$$

Für jedes andere z mit $|z| < R$ haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{-z}} \frac{1}{\zeta}d\zeta,$$

wobei C_{-z} den Integrationsweg $C_z(\theta) = R\exp(i\theta) - z$, $\theta \in [0, 2\pi]$ bezeichnet. Mit dem Cauchyschen Integralsatz angewandt auf die Funktion $h(\zeta) = 1/\zeta$ sehen wir dass dieses Integral nicht von z abhängt falls $|z| < R$ (Bild). Damit ist der Satz im Fall $f \equiv 1$ gezeigt.

Nun reduzieren wir den allgemeinen Fall auf den Fall $f \equiv 1$. Wir werden den Cauchyschen Integralsatz auf die Funktion

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

anwenden. Diese Funktion in a priori nur auf $\Omega \setminus \{z\}$ holomorph und in ζ lediglich stetig. Wir werden später überprüfen dass der Cauchysche Integralsatz auch für solche Funktionen gilt. Wir bekommen

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - f(z),$$

wobei die letzte Gleichheit den bereits gezeigten Fall $f \equiv 1$ dieses Satzes benutzt.

Es bleibt zu zeigen dass wir der Cauchysche Integralsatz auch für die Funktion g gilt. Dafür verizieren eine allgemeinere Version des Lemma von Goursat. Zur Erinnerung: das Lemma von Goursat erlaubt es, auf sternförmigen Mengen Stammfunktionen zu konstruieren, und eine Funktion mit Stammfunktion hat Integral 0 auf geschlossenen Integrationswegen. □

Lemma 4.2 (Lemma von Goursat, 2. Version)**.** *Sei $T = \operatorname{conv}\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{C}$ ein Dreieck, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $T \subseteq \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ holomorph und in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Dann ist*

$$\int_{\gamma_{abc}} f(z)dz = 0. \tag{4.2}$$

Beweis. In zwei Schritten:

(i) für Dreiecke mit z_0 als Ecke,

(ii) für allgemeine Dreiecke.

□

Korollar 4.3. *Unter den Voraussetzungen der Cauchy-Integralformel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(\partial_z)^n f(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta. \tag{4.3}$$

Insbesondere ist jede holomorphe Funktion beliebig oft (komplex) differenzierbar.

Beweis. Per Induktion über n. Der Fall $n = 0$ wurde im Satz 4.1 gezeigt. Induktionsschritt: man nehme (4.3) an, wir wollen die gleiche Aussage mit $n + 1$ anstelle von n zeigen.

Nach Satz 3.5 können wir die Ableitung und das Integral vertauschen:

$$\begin{aligned}(\partial_z)^{n+1} f(z) &= \partial_z \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \partial_z \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C (n+1)\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}d\zeta.\end{aligned}$$ □

Korollar 4.4. *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ mit $\overline{B_R(z_0)} \subseteq \Omega$. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\geq R$ sodass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \textit{auf} \quad B_R(z_0).$$

Insbesondere ist jede holomorphe Funktion analytisch.

Beweis. ObdA $z_0 = 0$. Die Formel für geometrische Reihen liefert

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1 - z/\zeta} = \frac{1}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}(z/\zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}z^n.$$

Dies setzen wir in die Cauchy-Integralformel ein:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}z^n\Big)d\zeta. \end{aligned}$$

Summe und Integral können vertauscht werden da für jedes feste $z \in B_R(0)$ die Folge $\sup_{\zeta\in C}|f(\zeta)\zeta^{-n-1}z^n|$ exponentiell abfällt. Also bekommen wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n-1}}d\zeta\Big)z^n.$$

Der Betrag des Integrands ist $\leq C/|\zeta|^{n+1} = C/R^{n+1}$, also ist das n-te Integral $\leq C/R^{n+1}$, und damit ist der Konvergenzradius der Reihe $\geq R$.

Wenn wir wissen dass f sich als Potenzreihe schreiben lässt, dann sind die Koeffizienten dieser Reihe eindeutig als $a_n = f^{(n)}(0)/(n!)$ bestimmt. Dies liefert auch einen alternativen Beweis von Korollar 4.3. □

4.1 Holomorphiekriterien

Wir enden mit einigen weiteren hinreichenden Bedingungen für Holomorphie.

Satz 4.5 (Morera)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Falls $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ für jedes Dreieck $T \subseteq \Omega$, dann ist f holomorph.*

Beweis. Die Funktion f hat eine Stammfunktion F. Diese Stammfunktion ist holomorph, also ist $f = F'$ nach Korollar 4.3 ebenfalls holomorph. □

Satz 4.6 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$, und $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f in einer Umgebung von z_0 beschränkt, so lässt sich f zu einer holomorphen Funktion auf Ω fortsetzen.*

Beweis. ObdA $z_0 = 0$. Die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} z \cdot f(z), & z \in \Omega \setminus \{0\}, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

ist auf Ω stetig und auf $\Omega \setminus \{0\}$ holomorph. Nach der 2. Version des Lemmas von Goursat verschwinden Integrale von g über Dreiecke. Also hat g eine Stammfunktion, und deshalb ist auch g holomorph und insbesondere in 0 differenzierbar, d.h. es existiert der Grenzwert

$$g'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z} = \lim_{z\to 0} f(z).$$

Also lässt sich f zu einer stetigen Funktion auf Ω fortsetzen. Das gleiche Argument wie für g zeigt dass diese Fortsetzung auf Ω holomorph ist. □

Korollar 4.7 (Weierstraßscher Konvergenzsatz)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Man nehme an dass die Folge (f_n) lokal gleichmäßig gegen eine Fuktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, d.h., für jedes $z \in \Omega$ existiert ein $r > 0$ sodass $\lim_{n\to\infty}\sup_{w\in B(z,r)}|f_n(w) - f(w)| = 0$. Dann ist der Grenzwert f ebenfalls eine holomorphe Funktion.*

Beweis. Folgt aus dem Satz von Morera. □

4.2 Fundamentalsatz der Algebra

Definition 4.8. *Eine holomorphe Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *heißt* ganz.

Satz 4.9 (Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei f eine beschränkte ganze Funktion. Nach der Cauchy–Integralformel, für $R > |z|$,

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\|f\|_\infty}{(R - |z|)^2} R d\theta.$$

Die rechte Seite geht $\to 0$ wenn $R \to \infty$. Deshalb ist $f' \equiv 0$. □

Korollar 4.10. *Sei* $p \in \mathbb{C}[X]$ *ein Polynom vom Grad* ≥ 1*. Dann hat* p *mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$*.*

Beweis. Wenn p keine Nullstelle hat, dann ist $f(z) := 1/p(z)$ eine ganze Funktion. Da $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$, ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant. Dann ist aber auch p konstant, Widerspruch. □

Korollar 4.11. *Sei* $p \in \mathbb{C}[X]$ *ein Polynom vom Grad* $d \geq 0$*. Dann existieren* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z) = a \prod_{i=1}^d (z - b_i)$*.*

4.3 Analytische Fortsetzung

Lemma 4.12. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorph. Sei* $z_0 \in \Omega$ *ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge* $N := \{z : f(z) = 0\}$*. Dann verschwindet* f *auf einer Umgebung von* z_0*.*

Beweis. ObdA $z_0 = 0$. In einer Umgebung von 0 können wir f als eine Potenzreihe schreiben, d.h., es gibt ein $R > 0$ und eine Folge (a_n) sodass für alle $z \in B_R(0)$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Falls alle a_n verschwinden, ist $f \equiv 0$ auf $B_R(0)$ und wir sind fertig. Sei ansonsten $N := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$. Dann ist

$$f(z) = z^N \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} z^n\Big),$$

und die Funktion in den Klammern ist stetig, verschwindet nicht in 0, und damit nirgendwo auf $B_r(0)$ für ein $r > 0$. Die Funktion z^N verschwindet dagegen nur in 0. Also hat f keine Nullstellen in $B_r(0) \setminus \{0\}$, Widerspruch. □

Korollar 4.13. *Seien* $\Omega' \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* Ω *zusammenhängend, und* Ω' *nichtleer. Falls für zwei holomorphe Funktionen* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *gilt* $f = g$ *auf* Ω'*, so gilt auch* $f = g$ *auf* Ω*.*

Zur Erinnerung: Ω heißt *zusammenhängend* falls für beliebige disjunkte offene Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \cup B = \Omega$ gilt $A = \Omega$ oder $B = \Omega$.

Beweis. ObdA $g = 0$. Sei $N := \{z \mid f(z) = 0\}$. Dann ist $\Omega' \subseteq N^\circ$ (Inneres von N), insbesondere ist $N^\circ \neq \emptyset$. Die Menge N° ist offen, und aus Lemma 4.12 folgt dass $\Omega \setminus N^\circ$ auch offen ist. Um das zu sehen, sei $x \in \Omega \setminus N^\circ$. Wenn x nicht im Inneren dieser Menge liegt, dann ist x ein Häufungspunkt von N° also auch von N, und liegt deshalb selbst in N°.

Also sind beide Komponenten der Zerlegung $\Omega = N^\circ \cup (\Omega \setminus N^\circ)$ offene Mengen. Nach Definition einer zusammenhängenden Menge ist entweder $N^\circ = \Omega$ oder $\Omega \setminus N^\circ = \Omega$. Der zweite Fall ist ausgeschlossen, da $N^\circ \neq \emptyset$. ☐

4.4 Homotopie, einfach zusammenhängende Mengen

Definition 4.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zwei Abbildungen $\gamma, \gamma^* : [a, b] \to \Omega$ mit $\gamma(a) = \gamma^*(a)$, $\gamma(b) = \gamma^*(b)$ heißen* (Ω-)homotop *falls eine stitige Abbildung $\Gamma : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$ existiert, so dass $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$, $\Gamma(1, \cdot) = \gamma^*$, mit $\Gamma(\cdot, a)$ und $\Gamma(\cdot, b)$ konstant.*

Bemerkung. Es ist wichtig, dass $\Gamma(s, t) \in \Omega$ für alle s und t! Insbesondere hängt die Definition von der Menge Ω ab. Der Zusatz „Ω-“ in „Ω-homotop“ wird weggelassen wenn Ω aus dem Kontext klar sein sollte. Es ist leicht zu sehen, dass (Ω-)Homotopie eine Äquivalenzrelation ist.

Lemma 4.15. *Falls Ω offen ist, und γ, γ^* homotop sind, dann gibt es eine Abbildung $\tilde{\Gamma}$ wie oben, die zusätzlich auf $(0, 1) \times (a, b)$ (reell) differenzierbar ist.*

Beweis. ObdA $[a, b] = [0, 1]$. Sei $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine C^∞ Funktion mit $\operatorname{supp} \phi \subseteq [-1, 1]$ und $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Für ein kleines $\epsilon \in (0, 1)$, definiere

$$\tilde{\Gamma}(s, t) := (\Gamma * (\phi \otimes \phi)_{\epsilon s(1-s)t(1-t)})(s, t),$$

wobei

$$(\phi \otimes \phi)_r(x, y) = r^{-2}\phi(x/r)\phi(y/r),$$

$$(\Gamma * \Phi)(s, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(s - x, t - y)\Phi(x, y)dxdy.$$ ☐

Satz 4.16 (Cauchyscher Integralsatz, Version 3). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, γ, γ^* homotope Integrationswege in Ω. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_*} f(z)dz. \tag{4.4}$$

Beweis. ObdA $\gamma, \gamma_* : [0, 1] \to \Omega$. Sei Γ eine differenzierbare Abbildung wie in der Definition von Homotopie von γ, γ_*. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_*} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz,$$

wobei

$$\gamma_0 = \Gamma \circ \tilde{\gamma}_0,$$

und γ_0 ein Weg der um den Rand von $[0, 1]^2$ herum geht.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ unterteilen wir $[0, 1]^2$ in 4^n Quadrate mit der Seitenlänge 2^{-n}. Sei C_n die Menge der Ränder dieser kleinen Quadrate. Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{\tilde{\gamma}_n \in C_n} \int_{\Gamma \circ \tilde{\gamma}_n} f(z)dz.$$

Wenn n groß genug ist, dann ist jeder Pfad $\Gamma \circ \tilde{\gamma}_n$ in einer konvexen Teilmenge von Ω enthalten (benutze dazu Kompaktheit). Nach dem Cauchy–Integralsatz, Version 2, folgt dass dieses Konturintegral verschwindet. ☐

Definition 4.17. *Eine zusammenhängende offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt* einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Integrationsweg in Ω* nullhomotop*, d.h., homotop zu einer konstanten Kurve, ist.*

Bemerkung. Ω is genau dann zusammenhängend, wenn zwei beliegige Integrationswege γ, γ' in Ω mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind.

Bemerkung. Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend; $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist es nicht.

Lemma 4.18. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Dann ist Ω* wegzusammenhängend*, d.h., für beliebige $z_0, z_1 \in \Omega$ gibt es einen stetigen Weg γ in Ω mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1.*

Bemerkung. Aus Lemma 4.15 folgt dass γ differenzierbar gewählt werden kann.

Beweis. Sei z_0 fest und $U \subseteq \Omega$ die Menge aller z_1 die mit z_0 mit einem stetigen Weg verbunden werden können und V die Menge aller z_1 die mit z_0 nicht verbunden werden können. Es ist leicht zu sehen dass U und V offen sind. Da $z_0 \notin V$, folgt aus Definition einer zusammenhängenden Menge dass $U = \Omega$. $\square$

Satz 4.19 (Cauchy–Integralsatz, Version 4)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine Stammfunktion auf Ω. Insbesondere gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in Ω.*

Beweis. Sei $z_0 \in \Omega$ fest. Für $z \in \Omega$ wähle einen Integrationsweg γ_z mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z. Definiere

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)dz.$$

Diese Definition hängt nach dem Cauchy–Integralsatz, Version 3, nicht von der Wahl von γ_z ab, da, nach der Voraussetzung dass Ω einfach zusammenhängend ist, alle in Frage kommende γ_z paarweise homotop sind. Die Tatsache dass $F' = f$ ist kann man nun wie im Cauchy–Integralsatz, Version 2, überprüfen. $\square$

Korollar 4.20. *Unter den Voraussetzungen der Cauchy–Integralformel gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für jeden Integrationsweg γ der $(\Omega \setminus \{z\})$-homotop zu $\partial B_R(z_0)$ ist.

4.5 Satz von Runge

Der Satz von (Stone–)Weierstraß besagt dass jede stetige Funktion f auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann. Diese Aussage kann zwar in $\mathbb{C}$ verwendet werden, liefert aber Polynome in $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$, die im Allgemeinen keine Polynome in z sind. Wenn wie nur Polynome in z zulassen wollen, dann ist außerdem klar dass der Grenzwert f zumindest im Inneren des Definitionsbereichs aufgrund des Weierstrßschen Konvergenzsatzes holomorph sein muss.

Satz 4.21 (Satz von Runge)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K \subseteq \Omega$ kompakt, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine Folge f_k rationaler Funktionen, die in K gleichmäßig gegen f konvergieren. Falls $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend ist, dann kann man die f_k so wählen, dass sie Polynome sind.*

Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form $f(z) = p(z)/q(z)$, mit p, q Polynome, q nicht überall 0. Wir wissen bereits, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{z : q(z) = 0\}$ holomorph ist.

Beispiel. Die Funktion $f(z) = 1/z$ kann auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1/2 < |z| < 2\}$ nicht gleichmäßig durch Polynome in z approximiert werden, da $\int_{\partial B_1(0)} f(z)dz = 2\pi i$, aber für jedes Polynom P haben wir $\int_{\partial B_1(0)} P(z)dz = 0$.

Lemma 4.22. *Seien $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ wie oben. Dann gibt es endlich viele Segmente $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in C^1([0,1]; \Omega \setminus K)$, $\gamma_n(t) = a_n + tb_n$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(w)}{w-z} dw \text{ für alle } z \in K. \tag{4.5}$$

Beweis. Man kann K mit endlich vielen Quadraten überdecken die in Ω enthalten sind. Die γ_n's sind die Ränder dieser Quadrate. □

Beweis des Satzes von Runge. Benutze Riemannsummen die (4.5) approximieren. Im Fall $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend brauchen wir zusätzlich das folgende Lemma. □

Lemma 4.23. *Sei K kompakt, $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, $w \in \mathbb{C} \setminus K$. Dann kann $z \mapsto 1/(z-w)$ auf K gleichmäßig durch Polynome approximiert werden.*

Beweis. Fall 1: Sei $R > 0$ mit $K \subseteq B_R(0)$. Sei $w \in \mathbb{C} \setminus B_R$. Dann gilt:

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{w^{n+1}}, \tag{4.6}$$

und die Reihe konvergiert gleichmäßig auf K.

Fall 2: Sei $w \in \mathbb{C} \setminus K$ beliebig. Sei w_0 wie im Fall 1. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ stetig mit $\gamma(0) = w_0$, $\gamma(1) = w$. Sei $\rho = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \gamma([0,1]))$. Seien $0 = t_0 < t_1 < .. < t_N = 1$ so dass $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \rho$, sei $w_i = \gamma(t_i)$. Wir werden induktiv zeigen, dass $1/(z - w_i)$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann. Für $i = 0$ wissen wir das schon. Sei nun $w = w_{i+1}$, $w' = w_i$. Dann

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1 - \frac{w-w'}{z-w'}} = \sum_n \frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}. \tag{4.7}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf K, und jedes Reihenglied kann nach Induktionsvoraussetzung durch Polynome approximiert werden. □

5 Isolierte Singularitäten, Residuen, und meromorphe Funktionen

5.1 Isolierte Singularitäten

Definition 5.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_* \in \Omega$. Die Menge $\Omega \setminus \{z_*\}$ heißt* punktierte Umgebung *von z_*. Sei $f : \Omega \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_** isolierte Singularität *von f. Die Singularität z_* heißt*

(i) hebbar, *wenn* $\limsup_{z \to z_*} |f|(z) < \infty$

(ii) Pol, *wenn* $\limsup_{z \to z_*} |f|(z) = \infty$.

(iii) wesentlich, *sonst.*

Der Riemannsche Hebbarkeitssatz besagt dass eine holomorphe Funktion die in der punktierten Umgebung $\Omega \setminus \{z_*\}$ einer isolierten Singularität z_* beschränkt ist zu einer holomorphen Funktion auf Ω fortgesetz werden kann, deshalb der Name „ hebbar“.

Beispiele: sei $\Omega = \mathbb{C}$ und $z_* = 0$.

(i) für $f_1(z) = z$ ist diese Singularität hebbar,

(ii) für $f_2(z) = 1/z$ ein Pol,

(iii) für $f_3(z) = e^{1/z}$ wesentlich.

Als Nächstes schauen wir uns an wie Pole aussehen können.

Lemma 5.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $z_* \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nicht konstant. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \geq 1$ und eine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g(z_*) \neq 0$, sodass*

$$f(z) = f(z_*) + (z - z_*)^n g(z). \tag{5.1}$$

Beweis. ObdA $f(z_*) = 0$. Sei

$$f(z) = \sum_k a_k (z - z_*)^k \tag{5.2}$$

in $\omega = B_r(z_*)$. Da f nicht konstant ist und nach analytischer Fortsetzung gibt es ein $a_n \neq 0$. Sei $n = \min\{k : a_k \neq 0\}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Sei

$$g(z) := \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_*)^{k-n}, & z \in B_r(z_*), \\ f(z)/(z - z_*)^n, & z \in \Omega \setminus B_r(z_*). \end{cases} \tag{5.3}$$

□

Satz 5.3 (Ordnung eines Pols)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_* \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ holomorph, mit*

$$\lim_{z \to z_*} |f(z)| = \infty. \tag{5.4}$$

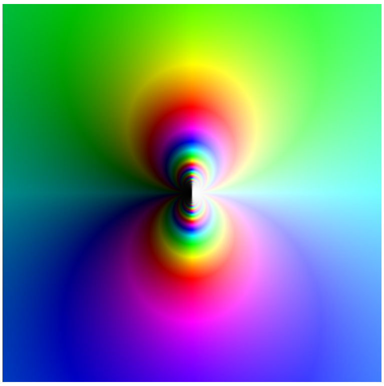
Dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \geq 1$ und eine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_*)^{-n} g(z)$ auf $\Omega \setminus \{z_*\}$ und $g(z_*) \neq 0$.

Die Zahl n heißt Ordnung *des Pols z_*.*

Beweis. Sei $r > 0$ so, dass $|f(z)| \geq 1$ auf $B_r(z_*) \setminus \{z_*\}$. Sei $h : B_r(z_*) \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$, $h(z) := 1/f(z)$. Da die Funktion h beschränkt ist, ist ihre Singularität in z_* hebbar, und sie kann zu einer holomorphen Funktion $H : B_r(z_*) \to \mathbb{C}$ mit $H(z_*) = 0$ fortgesetzt werden. Sei $H = (z - z_*)^n G(z)$ wie in Satz 5.2. Dann folgt $f(z) = 1/H(z) = (z - z_*)^{-n} g(z)$. □

Lemma 5.4. *Eine isolierte Singularität ist genau dann wesentlich, wenn es für alle $w_* \in \mathbb{C}$ eine Folge $z_k \to z_*$ gibt, so dass $f(z_k) \to w_*$.*

Zur Illustration ein Plot von $\exp(1/z)$ mit wesentlicher Singularität bei 0:



Beweis. Dass die Behauptung für Pole und hebbare Singularitäten nicht gelten kann ist klar.

Sei z_* eine wesentliche Singularität. Wenn ein w_* existiert, so dass die Eigenschaft nicht gilt, dann gibt es $\varepsilon > 0$, $r > 0$, so dass $f(B_r(z_*) \setminus \{z_*\}) \cap B_\varepsilon(w_*) = \emptyset$.

Dann ist $g(z) = 1/(f(z) - w_*)$ in $f(B_r(z_*) \setminus \{z_*\})$ holomorph und beschränkt, und hat deshalb in z_* eine hebbare Singularität. Wir bezeichnen mit g die Fortsetzung.

Falls $g(0) \neq 0$, dann ist $1/g$ in z_* holomorph, deshalb war z_* eine hebbare Singularität von f.

Falls $g(0) = 0$, dann folgt aus der Stetigkeit von g dass $|f|(z) \to \infty$ as $z \to z_*$, deshalb ist z_* ein Pol. $\square$

Die folgende Aussage mit $r = 0$ beschreibt wie holomorphe Funktionen in der Umgebung einer isolierten Singularität aussehen. Der Beweis funktioniert ähnlich wie der bereit ausgeführte Beweis dass holomorphe Funktionen analytisch sind.

Satz 5.5 (Laurententwicklung)**.** *Sei $\Omega = B_R(z_*) \setminus \overline{B_r(z_*)}$, $0 \leq r < R$, $z_* \in \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibet eine auf Ω absolut konvergete Reihe mit*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_*)^k, \quad z \in \Omega. \tag{5.5}$$

Falls f auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_*)} \frac{f(w)}{w - z} dw \tag{5.6}$$

Beweis. Seien $r < \rho < \rho' < R$. Dann gilt für alle $z \in \Omega$ mit $\rho < |z| < \rho'$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{5.7}$$

(Bew.: Cauchy–Integralsatz nach Verbidung der beiden Integrationswege).

Im ersten Integral entwickeln wir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{w^n} \tag{5.8}$$

und im zweiten Integral

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{z^n}. \tag{5.9}$$

Die Integrale und Summen vertauschen, und wir bekommen

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw}_{=: a_n} + \sum_{n \geq 0} z^{-n-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} f(w) w^n dw}_{=: a_{-n-1}}. \tag{5.10}$$

Dass die Koeffizienten a_n nicht von ρ, ρ' abhängen folgt aus dem Cauchy–Integralsatz. $\square$

Korollar 5.6. *Singularitäten können wie folgt mithilfe von Laurentreihen klassifiziert werden:*

(i) hebbar $\iff$ $a_k = 0$ *für alle* $k < 0$,

(ii) Pol $\iff$ $a_k \neq 0$ *für mindestens eins und höchstens endlich viele* $k < 0$,

(iii) wesentlich $\iff$ $a_k \neq 0$ *für unendlich viele* $k < 0$.

5.2 Residuen

Definition 5.7. *Sei $f : B_r(z_*) \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Das Residuum von f in z_* ist*

$$\operatorname{res}_{z_*} f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_*)} f(z) dz \tag{5.11}$$

für $\rho \in (0, r)$.

Bemerkung. Das Integral hängt nicht von ρ ab, weil die Integrationswege $\partial B_\rho(z_*)$ in $B_r(z_*) \setminus \{z_*\}$ paarweise homotop sind.

Bemerkung. Residuen sind additiv: $\operatorname{res}_{z_*}(f + g) = \operatorname{res}_{z_*}(f) + \operatorname{res}_{z_*}(g)$.

Lemma 5.8. *Wenn $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_*)^k$ die Laurententwicklung von f in einer punktierten Umgebung von z_* ist, dann ist $\operatorname{res}_{z_*} f = a_{-1}$.*

Beweis. ObdA $z_* = 0$. Wenn wir die Laurentreihenentwicklung in die Definition des Residuums einsetzen, erhalten wir ein absolut konvergentes Integral, wir können also die Summe und das Integral vertauschen:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{res}_0 f \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k dz \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_{\partial B_\rho(0)} z^k dz \\
&\quad = a_{-1}.
\end{aligned}$$

Wir benutzen hier wieder die Tatsache dass

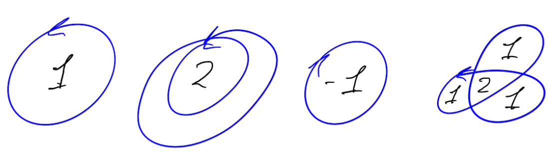
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(0)} z^k dz = \begin{cases} 1, & k = -1, \\ 0, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Für $k \neq -1$ liegt dies daran dass z^k auf $B_\rho(0) \setminus \{0\}$ die Stammfunktion $z^{k+1}/(k+1)$ besitzt, und für $k = -1$ mit expliziter Parametrisierung des Integrals. $\square$

Bemerkung. Insbesondere, ist $\operatorname{res}_{z_*} f = 0$ falls z_* eine hebbare Singularität und $\operatorname{res}_{z_*} f = \lim_{z \to z_*} (z - z_*) f(z)$ falls z_* ein Pol der Ordnung 1 ist.

Definition 5.9. *Sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$, $z_* \in \mathbb{C} \setminus Bild(\gamma)$. Die* Windungszahl *von γ um z_* ist*

$$n_{\gamma, z_*} := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_*} dz. \tag{5.12}$$



Satz 5.10. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Dann gilt*

(i) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ gilt $n_{\gamma, z} \in \mathbb{Z}$.

(ii) $z \mapsto n_{\gamma, z}$ ist konstant auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

(iii) $n_{\gamma, z} = 0$ für alle z in der unbeschränkten zusammenhängenden Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$.

Beweis. Für $t \in [a,b]$ sei

$$G(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds. \tag{5.13}$$

Dann $G(a) = 0$, $G(b) = 2\pi i n_{\gamma,z}$, $G'(t) = \gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$ für alle bis auf endlich viele $t \in [a,b]$. Sei

$$H(t) := (\gamma(t)-z)e^{-G(t)}. \tag{5.14}$$

Dann $H'(t) = 0$ (bis in endlich vielen Punkten); da H stetig ist folgt, dass H konstant ist. Deshalb

$$(\gamma(a)-z) = H(a) = H(b) = (\gamma(b)-z)e^{-G(b)}. \tag{5.15}$$

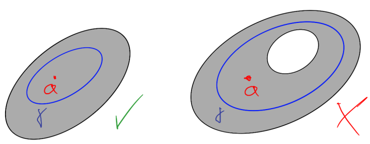
Da γ geschlossen ist, folgt $e^{-G(b)} = 1$, d.h., $G(b) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Das zeigt (i).

Die Funktion $z \mapsto n_{\gamma,z_*}$ ist als Integral stetiger Funktionen auf ihrem Definitionsbereich $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ stetig. Das Bild jeder Zusammenhangskomponente von Ω ist deshalb einerseits zusammenhängend, und andererseits, nach Teil (i), eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Also muss dieses Bild aus einem Punkt bestehen, und das zeigt (ii).

Teil (iii) folgt aus $\lim_{z_*\to\infty} \int_\gamma 1/(z-z_*)dz = 0$. □

Satz 5.11 (Residuensatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $A \subseteq \Omega$ endlich, $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega \setminus A$ ein geschlossener Ω-nullhomotoper Integrationsweg. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in A} n_{\gamma,a} \operatorname{res}_a f. \tag{5.16}$$



Der Residuensatz verallgemeinert den Cauchy–Integralsatz und die Cauchy–Integralformel.

Beispiel (Cauchy–Integralsatz). Sei $A = \emptyset$. Dann besagt der Residuensatz (Satz 5.11) dass für jeden geschlossenen nullhomotopen Integrationsweg γ in Ω und jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Beispiel (Cauchy–Integralformel). Sei γ ein geschlossener nullhomotoper Integrationsweg in Ω. Sei $a \in \Omega$ nicht im Bild von γ mit $n_{\gamma,a} = 1$. Sei $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir wenden den Residuensatz auf $f(z) := g(z)/(z-a)$ an und erhalten

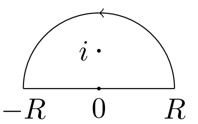
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = n_{\gamma,a} \operatorname{res}_a f = g(a).$$

Beispiel (Cauchy–Integralformel für die Ableitungen). Seien Ω, γ, a, f wie im vorherigen Beispiel und $k \geq 0$. Wir wenden den Residuensatz auf $f(z) := g(z)/(z-a)^{k+1}$ an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = n_{\gamma,a} \operatorname{res}_a f = g^{(k)}(a)/k!.$$

Beispiel. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

Beweis. Für den unten angegebenen Integrationsweg γ gilt $n_{\gamma,i} = 1$ und $n_{\gamma,-i} = 0$.



Sei $f(z) := 1/(1+z^2) = (z-i)^{-1}(z+i)^{-1}$. Mit dem Residuensatz folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \operatorname{res}_i f = \frac{1}{2i}.$$

Das Integral über den Kreisbogen geht $\to 0$ wenn $R \to \infty$. □

Beweis. Per Induktion über $|A|$. Falls $A = \emptyset$ ist, verschwindet die linke Seite nach Cauchy–Integralsatz, Version 4. Die rechte Seite verschwindet ebenfalls.

Sei nun $a \in A$ und man nehme an dass der Satz für die Menge $A \setminus \{a\}$ bekannt ist. Sei $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ die Laurententwicklung in einer punktierten Umgebung von a und $f_a(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-a)^k$ der *Hauptteil* dieser Laurentreihe (d.h., die Teilsumme mit nur negativen Potenzen. Diese Teilsumme konvergiert auf $\mathbb{C}\setminus\{a\}$). Dann hat die Funktion $f - f_a$ in a eine hebbare Singularität, sowie die gleichen Residuen wie f in allen Punkten von $A \setminus \{a\}$. Wir können also die Induktionsannhame auf die holomorphe Fortsetzung dieser Funktion auf $\Omega \setminus (A \setminus \{a\})$ anwenden.

Es bleibt den Satz für die Funktion f_a zu zeigen. ObdA $A = \{a\}$. Per Definition von $n_{\gamma,a}$ und nach Lemma 5.8 haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_{-1}(z-a)^{-1}dz = a_{-1}n_{\gamma,a} = n_{\gamma,a}\operatorname{res}_a f.$$

Für $k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_k(z-a)^k dz = 0,$$

da die Funktion $(z-a)^k$ die Stammfunktion $(z-a)^{k+1}/(k+1)$ auf $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ hat. Die Beiträge verschiedener k können summiert und die Summe mit dem Integral vertauscht werden weil die Laurentreihe auf $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. □

5.3 Meromorphe Funktionen

Definition 5.12. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt* meromorph *wenn die Menge $A := f^{-1}(\infty) := \{z \in \Omega \mid f(z) = \infty\}$ diskret ist (d.h., für alle $a \in A$ gibt es $r > 0$ so dass $B_r(a) \cap A = \{a\}$), die Funktion f auf $\Omega \setminus A$ holomorph ist, und alle $z \in A$ Pole von $f|_{\Omega\setminus A}$ sind (d.h., $\lim_{w\to a}|f(w)| = \infty$ für alle $a \in A$).*

Lemma 5.13. *Summen, Produkte und Quotienten (außer wenn man durch die konstante 0-Funktion teilt) meromorpher Funktionen können zu meromorphen Funktionen fortgesetzt werden.*

Beweis. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ meromorph und nicht konstant. Sei $a \in \Omega$ mit $f(a) \in \{0, \infty\}$. Dann kann man f in einer punktierten Umgebung von a in der Form $f(z) = g(z)(z-a)^k$ mit einer holomorphen Funktion g mit $g(a) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ schreiben. □

Lemma 5.14. *Sei $g : B_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(0) \neq 0$. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f(z) = z^k g(z)$. Dann gilt*

$$\operatorname{res}_0 \frac{f'}{f} = k.$$

Beweis.
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{kz^{k-1}g(z) + z^k g'(z)}{z^k g(z)} = \frac{k}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Der erste Bruch auf der rechten Seite hat Residuum k. Der zweite Bruch auf der rechten Seite ist in 0 holomorph, hat also Residuum 0. $\square$

Satz 5.15 (Argumentprinzip)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein geschlossener nullhomotoper Integrationsweg in Ω. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ meromorph ohne Nullstellen und Pole auf dem Bild von γ. Dann gilt*
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A} n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f,a}, \tag{5.17}$$
wobei A die Menge aller Nullstellen und Pole von f ist und
$$\operatorname{ord}_{f,a} := \begin{cases} k, & \text{wenn } a \text{ eine Nullstelle von } f \text{ der Ordnung } k \text{ ist,} \\ -k, & \text{wenn } a \text{ ein Pol von } f \text{ der Ordnung } k \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Summe auf der rechten Seite sind nur endlich viele Summanden $\neq 0$. Dies liegt daran dass die Nullstellenmenge und die Polmenge von f diskret sind und die Menge $\overline{\{z \mid n_{\gamma,z} \neq 0\}}$ nach Teil (iii) des Satzes 5.10 kompakt ist.

Bemerkung. Der Name „Argumentprinzip“ wird erst Sinn machen wenn wir die Lograithmusfunktion kennenlernen.

Beweis. Dies folgt aus dem Residuensatz, da $\operatorname{ord}_{f,a} = \operatorname{res}_a f'/f$. Wie haben dies gerade im Fall $a = 0$ gezeigt; die Aussage ist aber translationsinvariant. $\square$

Lemma 5.16 (Satz von Rouché)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein geschlossener nullhomotoper Integrationsweg in Ω. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}^*$ meromorph ohne Pole auf Bild(γ) und mit $|f| > |g|$ auf Bild(γ). Dann gilt:*
$$\sum_a n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f,a} = \sum_a n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f+g,a} \tag{5.18}$$

Beweis. Sei $f_t := f + tg$, $t \in [0,1]$. Da $|f| > |g|$ auf *Bild*(γ), hat f_t keine Nulstellen und Pole auf *Bild*(γ). Nach dem Argumentprinzip gilt
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz = \sum_{a\in A} n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f_t,a}. \tag{5.19}$$
Der Integrand ist in t stetig, und damit hängt die rechte Seite stetig von t ab. Sie nimmt aber Werte in $\mathbb{Z}$ an, deshalb muss sie in t konstant sein. $\square$

Satz 5.17. *Sei Ω offen und zusammenhängend. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(\Omega)$ offen.*

Beweis. ObdA $0 \in \Omega$, $f(0) = 0$, und wir wollen zeigen $0 \in f(\Omega)^\circ$. Da f nicht konstant ist, ist 0 kein Häufungspunkt der Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$. Folglich existiert ein $r > 0$ sodass $\overline{B_r(0)} \subseteq \Omega$ und $f(z) \neq 0$ für alle z mit $|z| = r$. Wegen Kompakheit gilt dann $\epsilon := \inf_{|z|=r}|f(z)| > 0$. Sei $\gamma = \partial B_r(0)$. Für jedes w mit $|w| < \epsilon$ haben wir dann nach dem Satz von Rouché
$$\sum_a n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f-w,a} = \sum_a n_{\gamma,a}\operatorname{ord}_{f,a} \geq n_{\gamma,0}\operatorname{ord}_{f,0} \geq 1,$$
da f keine Pole hat. Da $f - w$ ebenfalls keine Pole hat, muss es eine Nullstelle in $B_r(0)$ haben. $\square$

Korollar 5.18 (Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und nichtkonstant. Dann hat f keine lokalen Maxima.*

Bemerkung. In den Hausaufgaben soll dies auf einem direkteren Weg mithilfe des Cauchy–Integralsatzes gezeigt werden.

5.4 Riemannsche Zahlensphäre, rationale Funktionen

Meromorphe Funktionen bilden nach $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ab. Um solche und andere Funktionen besser zu verstehen, versehen wir $\mathbb{C}^*$ mit der Struktur einer *komplexen Mannigfaltigkeit.* Wir werden nur eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten benutzen, sie werden üblicherweise als *Riemannsche Flächen* bezeichnet.

Definition 5.19. *Eine* Riemannsche Fläche *ist eine Menge X zusammen mit einer Menge $\mathcal{A} = \{\phi_a : U_a \to V_a \mid a \in A\}$, genannt* Atlas, *wobei $U_a \subseteq X$, $V_a \subseteq \mathbb{C}$, und $\phi_a : U_a \to V_a$ sind bijektive Abbildungen die* Karten *heißen und folgende Eigenschaften erfüllen:*

(i) $\bigcup_{a \in A} U_a = X$ *(die Karten überdecken X), und*

(ii) für beliebige $a, b \in A$ ist die Menge $\phi_b(U_a \cap U_b) \subseteq V_b$ offen und $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ ist auf dieser Menge holomorph.

Bemerkung. Die zweite Eigenschaft mit $a = b$ impliziert insbesondere dass V_a offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind.

Bemerkung. Zwei Atlanten heißen äquivalent wenn ihne Vereinigung wieder ein Atlas ist. Es ist üblich Äquivalenzklassen von Atlanten zu betrachten, wir müssen das aber noch nicht tun.

Beispiel. Sei $X = \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{A} = \{\mathrm{id} : \Omega \to \Omega\}$.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{A}$ besteht aus 2 Elementen:

$$\phi_0 : U_0 = \mathbb{C} \to \mathbb{C} = V_0, \quad z \mapsto z,$$

$$\phi_\infty : U_\infty \mathbb{C}^* \setminus \{0\} \to \mathbb{C} = V_\infty, \quad z \mapsto \begin{cases} 1/z, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Bild : Sphäre, stereographische Projektion in 2 Dimensionen.

Definition 5.20. *Seien X_1, X_2 Riemannsche Flächen. Eine Funktion $f : X_1 \to X_2$ heißt* holomorph *falls für alle Karten $\phi_i : U_i \to V_i$ auf X_i, $i = 1, 2$, die Menge $\phi_1(f^{-1}(U_2) \cap U_1)$ offen ist und die Funktion $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ auf dieser Menge holomorph ist.*

Beispiel. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Die obige Definition von Holomorphie stimmt dann mit der früheren Definition überein.

Beispiel. Sei $\mathbb{C}^*$ die Riemannsche Sphäre. Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$,

$$f(z) := \begin{cases} 1/z, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ \infty, & z = 0, \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

holomorph. Wir kürzen diese Abbildung zu $f(z) = 1/z$ ab.

Lemma 5.21. *Seien X_1, X_2, X_3 Riemannsche Flächen. Seien $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$ holomorphe Funktionen. Dann ist $f_2 \circ f_1$ ebenfalls eine holomorphe Funktion.*

Lemma 5.22. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$. Dann ist f holomorph als Abbildung zwischen Riemannschen Flächen genau dann wenn f meromorph ist.*

Beweis. Wir haben eine Karte $\phi : \Omega \to \Omega$ und zwei Karten ϕ_0, ϕ_∞ auf $\mathbb{C}^*$.

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ meromorph. Wir müssen überprüfen dass $\phi(f^{-1}(U_a) \cap \Omega)$ offen und $\phi_a \circ f \circ \phi^{-1}$ darauf holomorph ist für $a = 0, \infty$. Die Menge $f^{-1}(\infty)$ ist diskret nach Definition von Meromorphie und $f^{-1}(0)$ ist abgeschlossen, also ist $\phi(f^{-1}(U_a) \cap \Omega) = f^{-1}(U_a)$ jeweils offen. Wir haben $\phi_0 \circ f \circ \phi^{-1} = f$ auf $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$, und diese Funktion ist holomorph nach Definition von Meromorphie. Weiterhin ist $(\phi_\infty \circ f \circ \phi^{-1})(z) = 1/f(z)$ auf $\Omega \setminus f^{-1}(0)$. Diese Funktion ist holomorph auf $\Omega \setminus f^{-1}(\{0,\infty\})$. Wenn $f(z) = \infty$, dann ist nach Definition von Meromorphie $\lim_{w\to z}|f(w)| = \infty$, also ist $\lim_{w\to z} 1/f(w) = 0$. Die Singularität von $1/f$ ist also hebbar, und die Fortsetzung in z holomorph.

Die Rückrichtung funktioniert ähnlich. $\square$

Lemma 5.23. *Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis. Nach Definition bedeutet die Holomorphie dass die Funktionen $f \circ \phi_0^{-1}$ und $f \circ \phi_\infty^{-1}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph sind, wobei ϕ_0, ϕ_∞ die beiden Karten auf $\mathbb{C}^*$ sind. Insbesondere sind die Funktionen $f \circ \phi_0^{-1}$ und $f \circ \phi_\infty^{-1}$ jeweils auf der kompakten Menge $\overline{B_1(0)}$ beschränkt. Wir haben aber

$$\mathbb{C}^* = \phi_0^{-1}(\overline{B_1(0)}) \cup \phi_\infty^{-1}(\overline{B_1(0)}),$$

und es folgt dass f auf $\mathbb{C}^*$ beschränkt ist. Insbesondere ist $f|_\mathbb{C}$ eine beschränkte ganze Funktion, und deshalb nach dem Satz von Liouville konstant. Da die Funktion $f \circ \phi_\infty^{-1}$ in 0 stetig ist, folgt dass $f(\infty)$ mit dieser Konstante übereinstimmt. $\square$

Satz 5.24. *Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ holomorph. Dann gibt es teilerfremde Polynome p und q mit $f = p/q$ auf $\mathbb{C}$.*

Beweis. Zuerst bemerken wir dass $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ genau dann holomorph ist wenn die Funktionen

$$f \circ \phi_0^{-1} : z \mapsto f(z), \quad f \circ \phi_\infty^{-1} : z \mapsto \begin{cases} f(1/z), & z \neq 0, \\ f(\infty), & z = 0 \end{cases}$$

jeweils als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ meromorph sind (allgemeiner, eine Funktion $f : X_1 \to X_2$ zwischen Riemannschen Flächen ist genau dann holomorph wenn $f \circ \phi^{-1}$ holomorph für jede Karte ϕ auf X_1 ist).

Sei ObdA f nicht konstant. Da die obigen Funktionen jeweils diskrete Nullstellenmengen und Polmengen haben, hat $f|_\mathbb{C}$ nur endlich viele Nullstellen und Pole.

Sei nun $f : \mathbb{C}^* \to C^*$ holomorph. Seien $z_1, \dots, z_M$ die Singularitäten von $f|_\mathbb{C}$ und $r_1, \dots, r_M$ ihre Ordnungen. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ sei

$$\tilde{f}(z) := f(z) \prod_{m=1}^{M} (z - z_m)^{-r_m}.$$

Diese Funktion kann zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, die wir wieder mit $\tilde{f}$ bezeichnen. Die Funktion $\tilde{f}$ hat auf $\mathbb{C}$ weder Pole noch Nullstellen.

Außerdem kann

$$z \mapsto \tilde{f}(1/z), \quad z \neq 0,$$

als Produkt von meromorphen Funktionen zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ forgesetzt werden. Folglich kann $\tilde{f}$ zu einer holomorphen Funktion $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ fortgesetzt werden. Wir unterscheiden nun 2 Fälle. Falls $F(\infty) \neq \infty$, ist $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph, und wir wissen bereits dass diese Funktion konstant sein muss. Falls $F(\infty) = \infty$, dann ist $1/F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, muss also konstant sein. Also ist F ebenfalls konstant. Folglich gilt

$$f(z) = c \prod_{m=1}^{M} (z - z_m)^{r_m}.$$

$\square$

Lemma 5.25. *Seien p, q Polynome mit komplexen Koeffizienten ohne gemeinsame Nullstellen sodass $p \not\equiv 0$, $q \not\equiv 0$, und die nicht beide konstant sind. Dann lässt sich $f(z) = p(z)/q(z)$ zu einer holomorphen Funktion $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ fortsetzen, und diese Funktion nimmt jeden Wert (gezählt mit Vielfachheit) genau $d := \max(\deg p, \deg q)$ Mal an.*

Die Vielfachheit des Funktionenwerts einer holomorphen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, in z ist hier die kleinste Zahl n sodass $f^{(n)}(z) \neq 0$. Für holomorphe Funktionen zwischen Riemannschen Flächen hängt die Vielfachheit nicht von der Koordinatenwahl ab.

Beweis. Wir zählen zuerst die Nullstellen. Sei $p(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 z^0$, $q(z) = b_n z^n + \cdots + b_0 z^0$. Das Polynom p hat genau m Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheit). Das sind genau die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$. Außerdem

$$f(z) = z^{m-n} \frac{a_m z^0 + \cdots + a_0 z^{-m}}{b_n z^0 + \cdots + b_0 z^{-n}}$$

hat eine Nullstelle der Ordnung $n - m$ in ∞ wenn $n > m$ und keine Nullstelle sonst. Also hat f auf $\mathbb{C}^*$ insgesamt $d = \max(n, m)$ Nullstellen.

Um zu zählen wie oft andere Werte $w \in \mathbb{C}$ angenommen werden, zählen wir Nullstellen von

$$f(z) - w = \frac{p(z) - q(z)w}{q(z)}.$$

Die Polynome $p - qw$ und q haben keine gemeinsamen Nullstellen, und

$$\max(\deg(p - qw), \deg(q)) = \max(\deg(p), \deg(q)).$$

Also gibt es wieder genau d Nullstellen.

Um zu zählen wie oft der Wert ∞ angenommen wird, betrachten wir $1/f$. □

5.5 Möbiustransformationen

Definition 5.26. *Eine* Möbiustransformation *ist eine Abbildung* $\phi_A : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ *von der Form*

$$\phi_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, \end{cases} \tag{5.20}$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *eine invertierbare Matrix mit Einträgen in* $\mathbb{C}$ *ist.*

Korollar 5.27. *Die bijektiven holomorphen Abbildungen* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ *sind genau die Möbiustransformationen.*

Beweis. Wir haben bereits gesehen dass alle holomorphen Abbildungen $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ rational sind. Es folgt aus Lemma 5.25 dass eine rationale Abbildung genau dann bijektiv ist wenn sie das Verhältnis von zwei linear unabhängigen Polynomen vom Grad ≤ 1 ist. Die lineare Unabhängigkeit wird in der Definition einer Möbiustransformation als Invertierbarkeit von A ausgedrückt. □

Man kann die Möbiustransformationen auf der Riemannschen Sphäre visualisieren, wenn man diese mittels stereographischer Projektion in $\mathbb{R}^3$ einbettet. Ich empfehle die folgenden Videos dazu anzuschauen.

Beispiel. Stereographische Projektion der Erdoberfläche:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Stereographic_Projection_Polar_Extreme.jpg`
Stereographische Projektion mit 3D-Drucker: `https://youtu.be/VX-0Laeczgk`
Möbiustransformationen: `https://youtu.be/0z1fIsUNh04`

Man kann die wesentlichen Eigenschaften der Möbiustransformationen aber schneller zeigen wenn man in $\mathbb{C}$ bleibt und keine Einbettung in $\mathbb{R}^3$ benutzt.

Lemma 5.28. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *eine injektive holomorphe Abbildung. Dann ist die Inverse* $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ *ebenfalls holomorph.*

Beweis. Wir wissen bereits dass f eine offene Abbildung ist, sodass $f(\Omega)$ offen ist. Wenn wir wüssten dass die Ableitung f' nicht verschwindet, dann folgt die reelle Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung f^{-1} aus dem entsprechenden Resultat aus der reellen Analysis, die komplexe Differenzierbarkeit aus den Cauhy–Riemannschen Differentialgleichungen.

Nehmen wir nun an dass $f'(z_*) = 0$ für ein $z_* \in \Omega$ gilt. Wir werden sehen dass f dann nicht injektiv sein kann. ObdA $z_* = 0$ und $f(z_*) = 0$. Sei $k = \mathrm{ord}_{f,0}$. Wie im Beweis des Satzes 5.17 sehen wir dass, für jedes $w \in B_\epsilon \setminus \{0\}$, die Funktion f den Wert w in einer bestimmten Umgebung von 0 mit Vielfachheit k annimmt. Da f' in dieser Umgebung nicht identisch verschwindet, ist mindestens einer dieser Werte einfach, und die Funktion f deshalb nicht injektiv. $\square$

Definition 5.29. *Bijektive holomorphe Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ oder, allgemeiner, Riemannschen Flächen heißen* biholomorph.

Der Name kommt daher, dass nach dem obigen Lemma die Inverse einer biholomorphen Abbildung auch (bi)holomorph ist.

Lemma 5.30. *Die Abbildung $A \mapsto \phi_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $GL(2, \mathbb{C})$ in die Gruppe (bzgl. Verkettung) der biholomophen Abbildungen von $\mathbb{C}^*$ nach $\mathbb{C}^*$.*

Beweis. Seien
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$
Ohne auf die Spezialfälle einzugehen in denen irgendwo ∞ auftaucht, haben wir
$$\begin{aligned} \phi_A(\phi_{A'}(z)) &= \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} \\ &= \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b')d(c'z + d')} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\ &= \phi_{AA'}(z). \end{aligned}$$
$\square$

Insbesondere folgt daraus dass die Gruppe der Möbiustransformationen isomorph zu $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}$ ist, also 2 komplexe Dimensionen hat. Außerdem sieht man dass diese Gruppe von den Transformationen der Form
$$z \mapsto az + b, \quad z \mapsto 1/z$$
erzeugt wird (tatsächlich sind Skalierungen hier redundant, also man könnte auch $a = 1$ setzen). Letztere Transformation ist eine *Inversion* am Einheitskreis (in reeller projektiver Geometrie würde man $z \mapsto \overline{1/z}$ eine Inversion nennen).

Ein *verallgemeinerter Kreis* in $\mathbb{C}^*$ ist entweder ein Kreis in $\mathbb{C}$ oder eine (reelle) Gerade in $\mathbb{C}$ zusammen mit ∞. Wir werden sehen dass verallgemeinerte Kreise von Möbiustransformationen auf verallgemeinerte Kreise abgebildet werden.

Beispiel. Die *Cayley-Abbildung*
$$C(z) := i\frac{1+z}{1-z}$$
bildet den Einheitskreis auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ab. In der Tat, $C(1) = \infty$. Sei nun $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$. Dann gilt
$$C(z) = i\frac{(1+z)(\overline{1-z})}{(1-z)(\overline{1-z})} = i\frac{1 + z - \overline{z} - z\overline{z}}{|1-z|^2} = i\frac{z - \overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{-2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}.$$

Bemerkung. Die obige Rechnung zeigt auch dass die Cayley-Transformation die Kreisscheibe $B_1(0)$ auf die obere Halbebene abbildet.

Dafür ist es bequem die verallgemeinerten Kreise zu parametrisieren.

Definition 5.31. *Seien $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Ihr* Doppelverhältnis *ist*

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) := \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Diese Funktion wird auf $(\mathbb{C}^*)^4$ holomorph (in jeder Variable) fortgesetzt.

Bemerkung (Scharfe 3-fache Transitivität)*.* Die Abbildung

$$\phi(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3) \tag{5.21}$$

ist eine Möbiustransformation, und es gilt

$$\phi(z_1) = 0, \quad \phi(z_2) = 1, \quad \phi(z_3) = \infty. \tag{5.22}$$

Umgekehrt kann man zeigen dass (5.21) die einzige Möbiustransformation mit der Eigenschaft (5.22) ist.

Lemma 5.32. *Wir haben $DV(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann wenn z_0, z_1, z_2, z_3 auf einem verallgemeinerten Kreis liegen.*

Beweis. Zuerst zeigen wir dass diese Bedingung symmetrisch in $z_0, \dots, z_3$ ist. Wir haben

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) = 1/DV(z_3, z_0, z_1, z_2),$$

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) + DV(z_3, z_1, z_2, z_0) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} + \frac{(z_3 - z_1)(z_2 - z_0)}{(z_3 - z_0)(z_2 - z_1)}$$

$$= \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3) - (z_3 - z_1)(z_2 - z_0)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{z_0 z_2 + z_1 z_3 - z_3 z_2 - z_1 z_0}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} = 1.$$

Da die Permutationen (0123) und (03) die symmetrische Gruppe $Sym(4)$ erzeugen, ist die Bedingung also symmetrisch.

Man nehme an dass $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind und schreibe $z = z_0$. Die Bedingung $DV(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kann als Gleichung

$$\operatorname{Im} DV(z, z_1, z_2, z_3) = 0$$

geschrieben werden. Für $z_0 \neq z_3$ haben wir

$$\operatorname{Im} DV(z, z_1, z_2, z_3) = \operatorname{Im} \frac{(z_0 - z_1)(\overline{z_0 - z_3})(z_2 - z_3)(\overline{z_2 - z_1})}{(z_0 - z_3)(\overline{z_0 - z_3})(z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1})},$$

und, da der Nenner reell ist, ist unsere Bedingung äquivalent zu

$$\operatorname{Im}(z_0 - z_1)(\overline{z_0 - z_3})(z_2 - z_3)(\overline{z_2 - z_1}) = 0. \tag{5.23}$$

Dies ist eine Bedingung an die Winkel zwischen den Kanten des Vierecks mit den Ecken $z_0, \dots, z_3$, und zwar dass die Summe der Winkel in gegenüberliegenden Ecken ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. □

Bemerkung. Für einen formalen Beweis wäre es einfacher die Formel für das Zentrum und Radius des Umkreises des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ zu verwenden und die quadratische Gleichung (5.23) mit der Gleichung dieses Kreises zu vergleichen. Diese Formeln sind aber nicht recht lang, sodass wir darauf verzichten.

Lemma 5.33. *Seien $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $A \in GL(2, \mathbb{C})$. Dann gilt*

$$DV(z_0, z_1, z_2, z_3) = DV(\phi_A(z_0), \phi_A(z_1), \phi_A(z_2), \phi_A(z_3)),$$

das Doppelverhältnis ist also unter Möbiustransformationen invariant.

Korollar 5.34. *verallgemeinerte Kreise werden unter Möbiustransformationen auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.*

Beweis von Lemma 5.33. Wir benutzen die Tatsache dass die Gruppe der Möbiustrasformationen von affinen Abbildungen und der Inversion $z \mapsto 1/z$ erzeugt wird. Invarianz des DV unter affinen Transformationen ist klar. Für $\phi(z) = 1/z$ haben wir

$$\begin{aligned} DV(\phi(z_0), \phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3)) &= \frac{(1/z_0 - 1/z_1)(1/z_2 - 1/z_3)}{(1/z_0 - 1/z_3)(1/z_2 - 1/z_1)} \\ &= \frac{(z_1 - z_0)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_0)(z_1 - z_2)} \\ &= DV(z_0, z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$ □

Es ist aber nicht der Fall dass Möbiustransformationen das Zentrum eines Kreises auf das Zentrum des Bildkreises abbilden. Am Ende charakterisieren wir noch die biholomorphen Abbildungen einer Kreisscheibe auf sich selbst. Wir brauchen ein Hilfslemma.

Lemma 5.35. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist die Funktion $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ auf ihrem Definitionsbereich auch holomorph.*

Beweis. Potenzreihenentwichlung oder Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen. □

Lemma 5.36. *Sei $\mathbb{D} := B_1(0)$ die (offene) Einheitskreisscheibe. Sei $\phi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ stetig sodass $\phi|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und injektiv ist und $\phi(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Dann ist ϕ die Einschränkung einer Möbiustransformation auf $\overline{\mathbb{D}}$.*

Beweis. Sei $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definiert durch

$$\psi(z) := \begin{cases} \phi(z), & |z| \le 1, \\ \overline{1/\phi(\overline{1/z})}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf $\mathbb{C}^* \setminus \partial\mathbb{D}$ holomorph, siehe Hilfslemma.

Für z in $\partial\mathbb{D}$ haben wir $\overline{1/z} = z$. Es folgt dass, für $z \in \partial\mathbb{D}$, $\overline{1/\phi(\overline{1/z})} = \overline{1/\phi(z)} = \phi(z)$ (hier haben wir auch $\phi(z) \in \partial(\mathbb{D})$ benutzt). Daraus folgt dass $\psi|_{\mathbb{C}}$ stetig ist.

Nun können wir mit dem Satz von Morera zeigen dass $\psi_{\mathbb{C}}$ holomorph ist (inklusive auf $\partial\mathbb{D}$, wo wir das noch nicht wussten). Es folgt dass $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ holomorph ist; wir haben bereits gezeigt dass solche Abbildungen rational sind. Da ϕ injektiv ist, hat es nach einer Folgerung aus dem Satz von Rouché keine mehrfachen Werte, also nimmt ψ jeden Wert in $\mathbb{D}$ mit Vielfachheit 1 an. Deshalb ist ψ eine Möbiustransformation. □

5.6 Der komplexe Logarithmus

Zur Erinnerung: wir schreiben $e^z := \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ haben wir

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}. \tag{5.24}$$

Außerdem ist $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Satz 5.37 (Hauptzweig des Logarithmus). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *einfach zusammenhängend,* $0 \notin \Omega$, $1 \in \Omega$. *Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Funktion* $\ln_\Omega : \Omega \to \mathbb{C}$ *mit* $e^{\ln_\Omega(z)} = z$ *für alle* $z \in \Omega$ *und* $\ln_\Omega 1 = 0$.

Falls $1 \in (a,b) \subseteq \Omega$, $a,b \in (0,\infty)$, *dann ist* $\ln_\Omega$ *auf* (a,b) *reell, und stimmt damit mit der Umkehrfunktion* $\ln$ *von* $\exp|_\mathbb{R}$ *überein.*

Beweis. Aus Satz 4.19 folgt, dass eine Stammfunktion F von $1/z$ auf Ω existiert mit $F(1) = 0$. Die Funktion $h(z) := ze^{-F(z)}$ hat die Ableitung

$$h'(z) = e^{-F(z)} - ze^{-F(z)}F'(z) = e^{-F(z)} - ze^{-F(z)} \cdot 1/z = 0,$$

und ist deshalb auf Ω konstant. Da $h(1) = 1$, folgt dass $e^{F(z)} = z$ für alle $z \in \Omega$. Also ist $\ln_\Omega = F$ der gesuchte Zweig des Logarithmus.

Wenn $0 < a < 1 < b$ und $(a,b) \in \Omega$, dann ist F auf (a,b) reell da F' dort ebenfalls reell ist. □

Bemerkung. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt die Funktion $f(z) = \ln_\Omega(z) + 2\pi ik$ ebenfalls die Bedingung $\exp(f(z)) = z$ auf Ω. Das sind die anderen Zweige des Logarithmus.

Bemerkung. Die Funktion $\ln_\Omega$ muss nicht auf ganz $(0,\infty) \cap \Omega$ reell sein.

Satz 5.37 lässt sich wie folgt verallgemeinern.

Satz 5.38. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *einfach zusammenhängend und* $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion* $g : \Omega \to \mathbb{C}$ *mit* $e^g = f$.

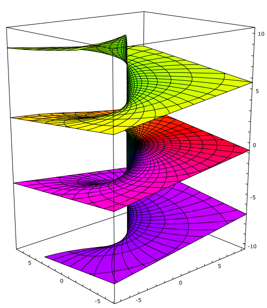
Satz 5.37 entspricht, bis auf die Zusatzaussagen, dem Fall $f(z) = z$ von Satz 5.38.

Beweis. Sei $z_* \in \Omega$. Aus Satz 4.19 folgt dass f'/f eine Stammfunktion g auf Ω besitzt. Da $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, können wir diese Stammfunktion so wählen, dass $e^{g(z_*)} = f(z_*)$. Sei $h(z) := f(z)e^{-g(z)}$. Dann gilt

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)}g'(z) = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)e^{-g(z)} \cdot f'(z)/f(z) = 0.$$

Also ist die Funktion h auf Ω konstant, und $h(z) = h(z_*) = 1$. Daraus folgt $f(z) = e^{g(z)}$. □

Das folgende Bild zeigt die Menge der Punkte $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ mit $z = \exp(w)$. Die beiden horizontalen Koordinaten zeigen z, sowohl die vertikale Koordinate als auch der Farbton zeigen $\operatorname{Im} w$, und die Helligkeit $\operatorname{Re} w$.



Dies ist der Graph von ln, wenn man ln als eine Funktion die in jedem Punkt unendlich viele Werte annimmt betrachtet.

Man kann ln auch als holomorphe Funktion zwischen Riemannschen Flächen $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ betrachten. Wir erläutern dies kurz.

Zunächst definieren wir die Struktur einer Riemannschen Fläche auf $\mathbb{C}$ die sich von der Standard-Struktur (auf den ersten Blick) unterscheidet. Für $k \in \mathbb{Z}$ seien

$$U_k := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (2\pi k - 1, 2\pi k + 1)\},$$

$$V_k := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], & k \text{ gerade}, \\ \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), & k \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$$\phi_k : U_k \to V_k, \quad \phi_k(z) = \exp(z).$$

Die Funktionen ϕ_k sind bijektiv, und jede Funktion $\phi_k \circ \phi_{k'}^{-1}$ ist die Identität auf ihrem Definitionsbereich (der allerdings leer ist falls $|k - k'| > 1$). Wenn wir nun $\mathbb{C}$ mit der vertikalen Koordinate im obigen Bild identifizieren, dann ist ϕ_k die Projektion auf die horizontale Koordinate. Diese Konstruktion liefert eine Riemannsche Fläche die lokal wie $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ aussieht, aber global wie $\mathbb{C}$. Dies ist die

Wenn wir nun den Quotienten $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ bilden, enthält jede Äquivalenzklasse nur einen Punkt in jeder Menge U_k. Wir können dass die gleichen Karten weiter nutzen; der Quotient ist biholomorph zu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Eine weitere interessante Riemannsche Fläche ist $\mathbb{C}/4\pi i\mathbb{Z}$. Mit den obigen Karten ist dies eine zweilagige Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf der eine holomorphe Version von $z \mapsto \sqrt{z}$ definiert werden kann. Hier ist eine Visualisierung: `https://youtu.be/UUW_ZU3_TQM`

6 Biholomorphe Abbildungen, Riemannscher Abbildungssatz

6.1 Biholomorphe Abbildungen

Definition 6.1. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen oder, allgemeiner, eine Riemannsche Fläche. Eine biholomorphe Abbildung $\Omega \to \Omega$ heißt* Automorphismus. *Die Menge aller Automorphismen $\Omega \to \Omega$ bezeichnen wir mit* $\operatorname{Aut}(\Omega)$.

Bemerkung. $\operatorname{Aut}(\Omega)$ ist eine Gruppe bzgl. Verkettung.

Beispiel. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : f(z) = az + b \text{ für } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$. Beweis: Hausaufgabe 5, Blatt 8.

Beispiel. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^*)$ ist die Menge der Möbiustransformationen.

Lemma 6.2 (Lemma von Schwarz). *Sei $f : B_1 \to B_1$ holomorph, mit $f(0) = 0$. Dann gilt:*

(i) $|f(z)| \leq |z|$ *für alle* $z \in B_1$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(iii) Falls ein $w \neq 0$ existiert mit $|f(w)| = |w|$, dann gibt es $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$.

(iv) Falls $|f'(0)| = 1$, dann gibt es $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$.

Beweis. Sei $g : B_1 \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist diese Funktion auf B_1 holomorph. Indem man das Maximumprinzip auf g und $\overline{B_r}$, $r < 1$, anwendet, erhält man $|g| \leq 1/r$ auf B_r. Daraus folgt $|g| \leq 1$ auf B_1 (Hausaufgabe 4.5). Damit sind (i) und (ii) gezeigt.

Falls $|g(z)| = 1$ für ein $z \in B_1$, folgt aus dem Maximumprinzip dass g konstant ist. Daraus folgen die Aussagen (iii) und (iv). $\square$

Korollar 6.3. *Sei $f \in \mathrm{Aut}(B_1)$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es $\theta \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Beweis. Indem wir Lemma 6.2(i) auf f und f^{-1} anwenden, erhalten wir $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in B_1$. Die Aussage folgt nun aus 6.2(iii). □

Satz 6.4. *Es gilt*

$$\mathrm{Aut}(B_1) = \{f : f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}, \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in B_1\}. \tag{6.1}$$

Diese Aussage unterscheidet sich von Lemma 5.36 dadurch, dass wir Bijektivität statt Injektivität annehmen, dafür aber die Annahme der Existenz einer stetigen Fortsetzung auf den Rand fallen lassen.

Beweis. Wir beweisen zuerst die "$\supseteq$" Inklusion. Für $\alpha \in B_1$ definieren wir $g_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} \in \mathrm{Aut}(B_1)$. Aus $|\alpha z| < 1$ folgt, dass g_α in $B_{1/|\alpha|}$ holomorph ist. Falls $|z| = 1$, dann

$$g_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{z\overline{z} - \overline{\alpha} z} = \frac{1}{z} \frac{\alpha - z}{\overline{z} - \overline{\alpha}}, \tag{6.2}$$

daraus folgt $|g(z)| = 1$. Aus dem Maximumprinzip folgt $g(B_1) \subseteq B_1$ (weil g nicht konstant ist!). Aus $g_\alpha(g_\alpha(z)) = z$ folgt, dass g_α bijektiv ist.

Wir merken, dass

$$g_\alpha(0) = \alpha \qquad \text{and} \qquad g_\alpha(\alpha) = 0. \tag{6.3}$$

Um die "$\subseteq$" Inklusion zu beweisen, betrachten wir $f \in \mathrm{Aut}(B_1)$. Sei f^{-1} die Umkehrabbildung. Wir definieren $\alpha = f^{-1}(0) \in B_1$. Sei $h = f \circ g_\alpha$, g_α wie oben. Dann gilt $h \in \mathrm{Aut}(B_1)$, mit $h(0) = 0$, und deshalb (Lemma von Schwarz, Korollar 6.3) $h(z) = e^{i\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $f(z) = h(g_\alpha(z))$ die gewünschte Form hat. □

6.2 Konvergente Funktionenfolgen

Satz 6.5 (Kleiner Satz von Montel)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig beschränkt sind, d.h., für alle $x \in \Omega$ gibt es $r > 0$ so dass*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{z \in B_r(x)} |f_k|(z) < \infty. \tag{6.4}$$

Dann gibt es eine Teilfolge f_{k_j} und eine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ so dass $f_{k_j} \to g$ lokal gleichmäßig in Ω.

Der kleine Satz von Montel ist ein Beispiel einer *kompakten Einbettung*: eine beschränkte Menge von Funktionen, hier im Raum lokal beschränkter holomorpher Funktionen, ist (folgen-)kompakt, hier wieder im gleichen Raum. Es gibt viele andere Aussagen solcher Art, z.B. Satz von Arzelá–Ascoli oder diverse Einbettungen von Sobolevräumen, aus denen der kleine Satz von Montel folgt.

Beweis. Sei $z \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{B_{2r}(z)} \subseteq \Omega$. Mit einem Diagonalfolgenargument sieht man dass es ausreicht eine Teilfolge zu finden die auf $B_r(z)$ gleichmäßig konvergiert. ObdA $z = 0$. Aus der Cauchy–Integralformel folgt dass $f_k(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n,k} z^n$ mit $|a_{n,k}| \leq C/(2r)^n$ auf B_{2r}, wobei $C = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{z \in \partial B_{2r}} |f_k(z)| < \infty$. Mit einem weiteren Diagonalfolgenargument finden wir eine Teilfolge sodass $a_{n,k_j} \to a_n$ für $j \to \infty$. Dann

$$f_{k_j}(z) \to \sum_{n \geq 0} a_n z^n =: g(z), \quad j \to \infty,$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf B_r. □

Satz 6.6 (Hurwitz)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend, und $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Falls die Folge f_k lokal gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergiert, dann ist g entweder konstant oder injektiv.*

Beweis. Sei jetzt Ω zusammenhängend, f_k injektiv für alle k und $f_k \to g$ lokal gleichmäßig auf Ω. Man nehme an dass g nicht konstant und nicht injektiv ist; es reicht daraus einen Widerspruch herzuleiten. Seien $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ mit $g(z_1) = g(z_2)$. ObdA $g(z_1) = g(z_2) = 0$ und $z_2 = 0$. Falls g nicht konstant ist, gibt es ein $R > 0$ mit $B_R \subseteq \Omega$ und $g(z) \neq 0$ für alle $g \in \overline{B_R} \setminus \{0\}$. Sei $\delta := \min|g|(\partial B_R) > 0$.

Wir definieren $g_k(z) := f_k(z) - f_k(z_1)$. Dann $g_k \to g$ lokal gleichmäßig auf Ω, und instbesondere gleichmäßig auf $\overline{B_R}$. Deshalb gilt $|g_k - g| < \delta \leq |g|$ auf ∂B_R für k groß. Aus dem Satz von Rouché (Lemma 5.16) folgt, dass $g_k = g + (g_k - g)$ auch eine Nullstelle $z' \in B_R$ hat. Also ist $f_k(z') = f_k(z_1)$. Da $z_1 \notin B_R$, ist f_{k_j} nicht injektiv, Widerspruch. □

6.3 Riemannscher Abbildungssatz

Satz 6.7 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ offen, nichleer, und einfach zusammenhängend. Sei $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es eine eindeutige biholomorphe Abbildung $f : \Omega \to B_1$ so dass*

$$f(z_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f'(z_0) > 0. \tag{6.5}$$

Hier bedeutet $f'(z_0) > 0$ dass $f'(z_0) \in (0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, d.h., $\operatorname{Re} f'(z_0) > 0$ and $\operatorname{Im} f'(z_0) = 0$.

Bemerkung. Aus dem Satz von Liouville folgt dass keine biholomorphe Abbildung $\mathbb{C} \to B_1$ existieren kann.

Beweis. Eindeutigkeit folgt leicht aus Korollar 6.3: wenn f, $g : \Omega \to B_1$ zwei biholomorphe Abbildungen sind, dann ist $h = f \circ g^{-1} \in \operatorname{Aut}(B_1)$, mit $h(0) = 0$ und $h'(0) = f'(0)/g'(0) > 0$, deshalb $h(z) = z$ nach dem Lemma von Schwarz. Wenn man eine biholomorphe Abbildung $F : \Omega \to B_1$ hat, ist die Aussage (6.5) leicht zu erfüllen indem man F mit einem Automorphismus von B_1 verkettet. Die Schwierigkeit besteht darin, die Existenz einer solchen biholomorphen Abbildung zu zeigen.

Wir werden die gesuchte biholomorphe Abbildung als Lösung eines Extremalwertproblems identifizieren. Sei

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to B_1 \text{ holomorph, injektiv, } f(z_0) = 0\}. \tag{6.6}$$

Der Beweis gliedert sich in 3 Schritte.

(i) Wir zeigen dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(ii) Wir zeigen dass es ein $f \in \mathcal{F}$ gilbt für das $|f'(z_0)|$ maximal ist.

(iii) Wir zeigen dass dieser Maximierer notwendigerweise surjektiv ist.

Schritt 1: Es reicht eine injektive holomorphe Abbildung $\Omega \to B_1$ zu konstruieren; die Zusatzbedingung $f(z_0) = 0$ kann anschließend erfüllt werden indem wir sie mit einem Automorphismus von B_1 komponieren.

Nach einer affinen Transformation können wir $0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ und $1 \in \Omega$ annehmen. Sei $f = \ln_\Omega$, sodass $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in \Omega$. Insbesondere ist f injektiv und $f(1) = 0$.

Wir behaupten dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(\Omega) \cap \overline{B_\delta(2\pi i)} = \emptyset$. Falls nicht, gäbe es eine Folge $(z_n) \subseteq \Omega$ mit $f(z_n) \to 2\pi i$. Daraus folgt

$$z_n = e^{f(z_n)} \to e^{2\pi i} = 1,$$

und das impliziert $f(z_n) \to f(1) = 0$, Widerspruch. Sei

$$g(z) := \frac{\delta}{f(z) - 2\pi i}. \tag{6.7}$$

Die Funktion g ist holomorph und injektiv auf Ω. Aus $f(z) \notin \overline{B_\delta(2\pi i)}$ folgt $|g(z)| < 1$.

Schritt 2: Wir betrachten das Funktional $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $\Phi(f) = |f'(z_0)|$. Sei

$$\sup \Phi(\mathcal{F}) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \Phi(f).$$

Wir werden zeigen, dass dieses Supremum ein Maximum ist, also dass ein $f \in \mathcal{F}$ mit $\Phi(f) = \sup \Phi(\mathcal{F})$ existiert.

Zunächst notieren wir dass für die gerade konstruierte Funktion $f \in \mathcal{F}$ die Ableitung $f'(z_0)$ nicht verschwidendet, sodass $\sup \Phi(\mathcal{F}) > 0$. Als Nächstes zeigen wir $\sup \Phi(\mathcal{F}) < \infty$. Um das zu sehen, nehme man ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq \Omega$ und $f \in \mathcal{F}$. Dann folgt aus dem Lemma von Schwarz, angewandt auf die Funktion $fz \mapsto (rz + z_0)$, dass $|f'(z_0)| \leq 1/r$. Folglich ist $\sup \Phi(\mathcal{F}) \leq 1/r < \infty$.

Sei $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine Folge mit $\Phi(f_n) \to \sup \Phi(\mathcal{F})$. Aus dem Kleinen Satz von Montel (Satz 6.5) folgt dass diese Folge eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, die wir wieder mit (f_n) bezeichnen. Sei f der Grenzwert dieser Folge. Dann gilt $|f| \leq 1$ auf Ω. Aus der Cauchy–Integralformel folgt $f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0)$, sodass $|f'(z_0)| = \lim_{n\to\infty}|f_n'(z_0)| = \sup \Phi(\mathcal{F})$. Insbesondere ist $|f'(0)| > 0$; damit ist f nicht konstant, und nach dem Satz von Hurwitz injektiv. Aus dem Maximumprinzip folgt $|f| < 1$, da die Funktion f konstant wäre wenn $|f|$ den Wert 1 annimmt. Damit ist $f \in \mathcal{F}$.

Schritt 3: Der gerade konstruierte Φ-Maximierer $f : \Omega \to B_1$ ist bijektiv.

Angenommen, f wäre nicht surjektiv, d.h. es gäbe ein $\alpha \in B_1 \setminus f(\Omega)$. Sei $\psi_\alpha \in \operatorname{Aut}(B_1)$ mit $\psi_\alpha(0) = \alpha$ und $\psi_\alpha(\alpha) = 0$ wie in Satz 6.4, d.h.,

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}. \tag{6.8}$$

Die Menge $U = \psi_\alpha(f(\Omega))$ ist einfach zusammenhängend, und $0 \notin U$. Sei $g(w) = e^{\frac{1}{2}\ln_U w}$, so dass $(g(w))^2 = w$ für alle $w \in U$. Insbesondere ist g injektiv. Wir definieren $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$. Die Funktion F ist holomorph, $F(\Omega) \subseteq B_1$, F ist injektiv, und $F(z_0) = 0$, deshalb $F \in \mathcal{F}$.

Sei $G : B_1 \to B_1$ durch $G = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}$ definiert, wobei $h(z) = z^2$. Dann $f = G \circ F$.

Es gilt $G : B_1 \to B_1$, $G(0) = 0$. Aus dem Lemma von Schwarz (Lemma 6.2(iv)) folgt, dass entweder $|G'(0)| < 1$ oder $G(z) = e^{i\theta} z$, d.h., $G : B_1 \to B_1$ ist bijektiv. Das kann aber nicht sein, weil h nicht injektiv ist. Deshalb $|G'(0)| < 1$. Man kann das auch direkt zeigen: wir haben $\psi_\alpha'(z) = \frac{|\alpha|^2 - 1}{(1 - \bar{\alpha} z)^2}$, und deshalb

$$|G'(0)| = |\psi_\alpha'(\alpha)||2g(\alpha)||\psi_{g(\alpha)}'(0)| = \frac{|\alpha|^2 - 1}{(1 - \bar{\alpha}\alpha)^2} \cdot 2|\alpha|^{1/2} \cdot \frac{|\alpha| - 1}{1} = \frac{2|\alpha|^{1/2}}{1 + |\alpha|} < 1.$$

Nach der Kettenregel haben wir $F'(z_0) = f'(z_0)/G'(0)$, d.h., $|F'|(0) > |f'|(0) > 0$. Das widerspricht der Tatsache dass f nach Konstruktion Φ maximiert. Deshalb ist f surjektiv. □

6.4 Regularität der Riemannschen Abbildungen auf dem Rand

Satz 6.8. *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ beschränkte offene Mengen sodass $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ stückweise differenzierbare Kurven sind. Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorph. Dann kann f zu einer stetigen bijektiven Abbildung $F : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_2}$ fortgesetzt werden.*

Bisher haben wir nur über das lokale Verhalten von holomorphen Abbildungen gesprochen und besitzen noch keine Werkzeuge die Aussagen über ihr Verhalten am Rand ermöglichen. In diesem Fall benutzen wir die Bijektivität wie folgt. Nach dem Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale haben wir

$$|\Omega_2| = \int_{\Omega_1} |\det Df|,$$

wobei Df die Jacobimatrix von f nach der Identifizierung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist. Die Jacobideterminante kann mithilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen berechnet werden:

$$|\det Df| = \left|\det \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & -\partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_2 & \partial_1 f_1 \end{pmatrix}\right| = \left|(\partial_1 f_1)^2 + (\partial_1 f_2)^2\right| = |f'|^2.$$

Also haben wir

$$\int_{\Omega_1} |f'|^2 = |\Omega_2| < \infty.$$

Wir wollen aus dieser Integralschranke für die Ableitung f' auf Eigenschaften der Funktion f schließen. Das passiert im folgenden Lemma.

Lemma 6.9. *Sei f wie in Satz 6.8 und $z_0 \in \partial\Omega_1$. Für $r > 0$ sei*

$$\rho(r) := \sup_{z,z' \in \Omega_1 : |z - z_0| = |z - z_1| = r} |f(z) - f(z')|.$$

Dann gibt es eine Folge (r_n) mit $r_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, und $\lim_{n\to\infty} \rho(r_n) = 0$.

Beweis. Sei $C_r = \partial B_r(z_0) \cap \Omega_1$ die Kreisline von Radius r um z_0. Die Regularitätsannahme an $\partial\Omega_1$ dient dazu, sicherzustellen dass C_r für alle $r < R$ zusammenhängend ist, wobei $R = R(z_0) > 0$.

Sei r klein genug, sodass C_r zusammenhängend ist. Dann gilt

$$\rho(r) = \sup_{z,z' \in C_r} |f(z) - f(z')| \leq \int_{C_r} |f'|,$$

wobei das letzte Integral ein reelles Kurvenintegral ist. Mit der Cauchy–Schwarz-Ungleichung bekommen wir

$$\rho(r)^2 \leq \Big(\int_{C_r} |f'|^2 r\Big)\Big(\int_{C_r} 1/r\Big) \leq 2\pi \Big(\int_{C_r} |f'|^2 r\Big).$$

Indem wir in Polarkoordinaten integrieren, bekommen wir

$$\int_0^R \frac{\rho(r)^2}{r} \leq 2\pi \int_0^R \Big(\int_{C_r} |f'|^2\Big) \mathrm{d}r \leq 2\pi \int_{\Omega_1} |f'|^2 < \infty.$$

Da die Funktion $r \mapsto 1/r$ in keiner Umgebung von 0 integrierbar ist, kann die Funktion ρ in keiner Umgebung von 0 von unten beschränkt sein. □

Beweis von Satz 6.8. Es reicht zu zeigen dass für jedes $z_\infty \in \partial\Omega_1$ der Grenzwert $\lim_{z \to z_\infty, z \in \Omega_1} f(z)$ existiert. Dann kann f zu einer stetigen Abbildung $F : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_2}$ fortgesetzt werden. Da f^{-1} die gleichen Voraussetzungen wie f erfüllt, lässt es sich ebenfalls zu einer stetigen Funktion $\tilde{F} : \overline{\Omega_2} \to \overline{\Omega_1}$ fortsetzen. Weiterhin ist $\tilde{F} \circ F : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_1}$ eine stetige Funktion und $\tilde{F} \circ F(z) = z$ für alle $z \in \Omega_1$. Folglich ist $\tilde{F}$ die inverse Funktion von F, also ist F bijektiv.

Sei nun $z_\infty \in \partial\Omega_1$. Man betrachte zwei beliebige Folgen (z_n) und $(\tilde{z}_n)$ in Ω_1 sodass

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{z}_n = z_\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w, \quad \lim_{n\to\infty} f(\tilde{z}_n) = \tilde{w},$$

Um zu sehen dass $\lim_{z\to z_\infty, z\in\Omega_1} f(z)$ existiert, reicht es zu zeugen dass dann notwendigerweise $w = \tilde{w}$ gilt (an dieser Stelle benutzen wir dass Ω_2 beschränkt ist).

Sei $g : (0,\infty) \to \Omega_2$ eine stetige Abbildung sodass $g_n = f(z_n)$ und $\lim_{t\to\infty} g_t = w$, und wähle ähnlich $\tilde{g}$ (hier bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ immen eine natürliche Zahl und $t \in (0,\infty)$ eine reelle Zahl). Sei $z_t := f^{-1}(g_t)$. Wir wissen nicht ob $\lim_{t\to\infty} z_t = z_\infty$, wir wissen aber dass $\lim_{n\to\infty}|z_n - z_\infty| = 0$ und dass $t \mapsto |z_t - z_\infty|$ eine stetige Funktion ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt sie also beliebige Werte in der Nähe von 0 an.

Sei nun $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|g_t - w| < \epsilon$ und $|\tilde{g}_t - w| < \epsilon$ für alle $t > n_0$. Nach dem vorherigen Lemma existiert ein $r < \min(|z_{n_0} - z_\infty|, |\tilde{z}_{n_0} - z_\infty|)$ sodass $\rho(r) < \epsilon$. Nach dem Zwischenwertsatz existieren $t, \tilde{t} > n_0$ sodass $|z_t - z_\infty| = |\tilde{z}_{\tilde{t}} - z_\infty| = r$. Es folgt

$$|w - \tilde{w}| \leq |w - f(z_t)| + |f(z_t) - f(\tilde{z}_{\tilde{t}})| + |f(\tilde{z}_{\tilde{t}}) - \tilde{w}| \leq \epsilon + \rho(r) + \epsilon \leq 3\epsilon.$$

Da ϵ beliebig war, folgt $w = \tilde{w}$. □

6.5 Riemannsche Abbildungen für Polygone

Der Existenzbeweis der Riemannschen Abbildungen war nicht sehr explizit. Für Polygone lässt sich die (Inverse der) Riemannschen Abbildung aber als das sogenannte Schwarz–Christoffel–Integral schreiben. Es ist bequemer anstelle von der offenen Kreisscheibe die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ zu betrachten. Wir werden Funktionen auf der Halbebene auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen wollen. Dafür ist die folgende Aussage nützlich.

Satz 6.10 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Bezeichne*

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \Omega \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, \\ \Omega^0 &:= \Omega \cap \mathbb{R}, \\ \Omega^- &:= \Omega \cap \{z : \operatorname{Im} z < 0\}. \end{aligned}$$

(i) Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf Ω^+ und Ω^-. Dann ist f holomorph auf Ω.

(ii) Man nehme an dass $\Omega^- = \{\overline{z} : z \in \Omega^+\}$. Sei $f : \Omega^+ \cup \Omega^0 \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf Ω^+, und reell auf Ω^0. Setze $f(z) := \overline{f(\overline{z})}$ für $z \in \Omega^-$. Die so fortgesetze Funktion ist holomorph auf Ω.

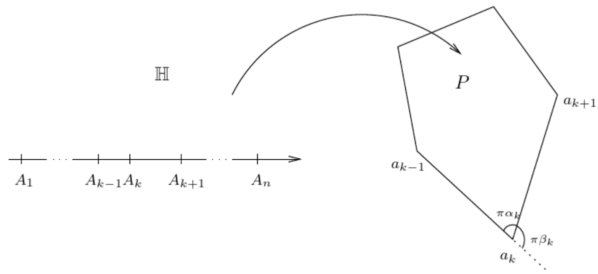
Beweis. Teil i): wir benutzen den Satz von Morera (Satz 4.5) sowie den Cauchy–Integralsatz auf $\Omega^\pm$.

Teil ii): Wenn f eine holomorphe Funktion ist, dann ist die Funktion $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ auch holomorph (das sieht man z.B. durch Reihenentwicklung). Also ist die fortgesetzte Funktion holomorph auf $\Omega^\pm$. Sie ist außerdem stetig auf Ω. □

Korollar 6.11. *Sei Ω wie in Satz 6.10, Teil ii). Sei $f : \Omega^+ \cup \Omega^0 \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph auf Ω^+, und man nehme an dass $f(\Omega^0)$ in einem verallgemeinerten Kreis in $\mathbb{C}$ enthalten ist. Dann besitzt f eine holoimorphe Fortsetzung auf Ω.*

Beweis. Sei ϕ eine Möbiustransformation die den verallgemeinerten Kreis aus der Annahme auf $\mathbb{R}$ abbildet. Wende Satz 6.10, Teil ii), auf die Funktion $\phi \circ f$ auf $(\Omega^+ \cup \Omega^0) \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(\infty))$ sowie auf die Funktion $1/(\phi \circ f)$ auf $(\Omega^+ \cup \Omega^0) \setminus f^{-1}(\phi^{-1}(0))$ an. □

Sei also $P \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Polygon mit Ecken $a_1, \ldots, a_n$. Sei $F : \mathbb{H} \to P$ eine biholomorphe Abbildung. So eine Abbildung existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz. Aus Satz 6.8 folgt dass F zu einer stetigen Funktion $F : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{P}$ fortgesetzt werden kann, die wir wieder mit dem gleichen Symbol bezeichnen. Wir nehmen weiterhin an dass $F(A_k) = a_k$ mit $A_1 < \ldots < A_n$ in $\mathbb{R}$.



Satz 6.12. *Sei F wie oben beschrieben und β_k wie im Bild. Dann gibt es eine Konstnate $c \in \mathbb{C}$ sodass für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt*

$$F'(z) = c(z - A_1)^{-\beta_1} \cdots (z - A_n)^{-\beta_n}.$$

Hier schreiben wir $z^{-\beta} = \exp(-\beta \ln_\omega z)$, wobei $\ln_\omega$ der Hauptzweig des Logarithmus auf $\omega = \mathbb{C} \setminus -i[0, \infty)$ ist.

Bemerkung. Es folgt dass

$$F(\zeta) = F(0) + \int_0^\zeta c(z - A_1)^{-\beta_1} \cdots (z - A_n)^{-\beta_n} \mathrm{d}z. \tag{6.9}$$

Dieses Integral macht auf für $\zeta \in \mathbb{R}$ Sinn, da alle Potenzen > -1 sind, und der Integrand auf $\mathbb{R}$ lokal integrierbar ist. Auf allen Intervallen (A_k, A_{k+1}) hat der Integrand konstantes Argument, damit bildet F diese Intervalle auf Liniensegmente in $\mathbb{C}$ ab.

Ein Problem mit der Formel (6.9) ist dass man die A_k's kennen muss. Im Fall eines Dreiecks ($n = 3$) kann man sie beliebig wählen, da Möbiustranfromationen scharf dreifach transitiv auf $\mathbb{C}^*$ wirken. Für allgemeine Polygone mit mehr Ecken gibt es dafür nur numerische Algorithmen.

Beweis. Um das Verhalten von F in A_k zu verstehen, definieren wir

$$h_k(z) = (F(z) - a_k)^{1/\alpha_k} = \begin{cases} \exp(\ln(F(z) - a_k)/\alpha_k), & z \neq A_k, \\ 0 & z = A_k, \end{cases}$$

wobei wir eine feste Wahl von ln auf einer offenen Umgebung von $\overline{P - a_k} \setminus \{0\}$ treffen. Die Funktion h_k bildet (A_{k-1}, A_{k+1}) auf eine Gerade ab, also lässt sich h_k nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip zu einer holomorphen Funktion auf dem Streifen $S_k := \{z \in \mathbb{C} \mid A_{k-1} < \operatorname{Re} z < A_{k+1}\}$ fortsetzen. Wir haben

$$\frac{h_k'(z)}{h_k(z)} = \frac{1}{\alpha_k} \frac{F'(z)}{F(z) - a_k} \neq 0$$

falls $z \in S_k \cap \mathbb{H}$. Damit ist $h_k'(z) \neq 0$ für $z \in S_k \setminus \mathbb{R}$. Für jedes $z_0 \in S_k \cap \mathbb{R}$ haben wir dass $h_k(z)$ je nach Vorzeichen von $\operatorname{Im} z$ in verschiedenen Halbebenen liegt wenn z in einer kleinen Umgebung von z_0 liegt. Das kann nur passieren wenn $h_k'(z_0) \neq 0$. Also verschwindet h_k' nirgendwo auf S_k.

Für $z \in S_k \cap \mathbb{H}$ haben wir

$$\begin{aligned} F'(z) &= (h_k^{\alpha_k})'(z) = \alpha_k h_k(z)^{\alpha_k - 1} h_k'(z), \\ F''(z) &= \alpha_k(\alpha_k - 1) h_k(z)^{\alpha_k - 2} h_k'(z)^2 + \alpha_k h_k(z)^{\alpha_k - 1} h_k''(z) \\ G(z) := \frac{F''(z)}{F'(z)} &= \frac{(\alpha_k - 1) h_k'(z)}{h_k(z)} + \frac{h_k''(z)}{h_k'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)}{z - A_k} + \text{holomorphe Fkt.} \end{aligned}$$

Also kann G zu einer meromorphen Funktion auf S_k fortgesetzt werden, mit einem einfachen Pol in A_k. Da dies auf jedem S_k geht und diese Fortsetzungen auf dem

Durchschnitt benachbarter Streifen übereinstimmen, kann G zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und

$$G(z) = \sum_k \frac{(\alpha_k - 1)}{z - A_k} + \text{ganze Fkt.}$$

Sei $\tilde{F}(z) := F(1/z)$, sodass $F(z) = \tilde{F}(1/z)$. Mit dem Schwarzschen Reflexionsprinzip sieht man dass $\tilde{F}$ zu einer holomorphen Funktion in einer Umgebung von 0 fortgesetzt werden kann. Dann gilt

$$F'(z) = \tilde{F}'(1/z)(-1/z^2), \quad F''(z) = \tilde{F}''(1/z)(-1/z^2)^2 + \tilde{F}'(1/z)(-2/z^3),$$

und

$$G(1/z) = \frac{F''(1/z)}{F'(1/z)} = \frac{\tilde{F}''(z)z^4 + \tilde{F}'(z)(-2z^3)}{\tilde{F}'(z)(-z^2)} = \frac{-\tilde{F}''(z)z^2}{\tilde{F}'(z)} + 2z \to 0$$

wenn $z \to 0$. Daraus folgt $\lim_{z\to\infty} G(z) = 0$. Also geht die ganze Funktion in der Formel für G gegen 0, sodass

$$G(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} = \sum_k \frac{(\alpha_k - 1)}{z - a_k} = -\sum_k \frac{\beta_k}{z - a_k}.$$

Daraus folgt dass die Ableitung von

$$F'(z)(z - A_1)^{\beta_1} \cdots (z - A_n)^{\beta_n}$$

verschwindet. □

7 Doppelperiodische (elliptische) Funktionen

Definition 7.1. *Sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Eine* elliptische (oder doppelperiodische) Funktion *ist eine nichtkonstante meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ die* 1- *und τ-periodisch ist, d.h.,*

$$f(z + 1) = f(z + \tau) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{7.1}$$

Wir bezeichnen das von 1 *und τ aufgespannte Gitter mit $\Lambda_\tau = \{h + \tau k : h, k \in \mathbb{Z}\}$ und seine Einheitszelle mit $D_\tau = \{x + y\tau : x, y \in [0, 1)\}$.*

Doppelperiodische Funktionen können auch als holomorphe Funktionen $\mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathbb{C}^*$ betrachtet werden.

Bemerkung. τ ist nicht von f eindeutig bestimmt, z.B., $\tau' = h + k\tau$, $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, hätte auch die Eigenschaft (7.1).

Bemerkung. Die Abbildung $\phi : \Lambda_\tau \times D_\tau \to \mathbb{C}$, $\phi(z, w) = z + w$, ist bijektiv.

Bemerkung. Bis auf einem Variabelwechsel reicht es anzunehmen, dass zwei Zahlen $\tau, \hat{\tau} \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(\tau/\hat{\tau}) \neq 0$ existieren, so dass $f(z + \tau) = f(z + \hat{\tau}) = f(z)$.

Lemma 7.2. *Eine elliptische Funktion hat in D_τ mindestens zwei Polstellen (oder eine mit Ordnung mindestens zwei).*

Beweis. Wenn f keine Polstelle hätte, dann wäre f auf $\overline{D_\tau}$ beschränkt, wegen Periodizität auf $\mathbb{C}$ beschränkt, und deshalb nach Dem Sat von Liouville konstant.

ObdA können wir annehmen dass f keine Pole auf ∂D_τ hat; ansonsten betrachten wir stattdessen $f(\cdot + z_0)$. Diese verschobenen Funktionen können nicht für alle z_0 eine Polstelle auf ∂D_τ haben, da die Menge der Polstellen von f ansonsten einen Häufungpunkt besäße und nach dem Satz über analytische Fortsetzung $f \equiv \infty$ wäre.

Aus (7.1) folgt und dem Residuensatz folgt

$$0 = \int_{\partial D_\tau} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in D_\tau^\circ} \operatorname{res}_a f. \tag{7.2}$$

Deshalb kann f nicht nur eine Polstelle der Ordnung 1 in D_τ haben. □

Definition 7.3. *Die Ordnung einer elliptischen Funktion ist die Summe der Ordnungen ihrer Pole in D_τ.*

Lemma 7.4. *Sei f elliptisch mit Ordnung m. Dann hat f genau m Nullstellen in D_τ.*

Beweis. Falls f keine Polstellen oder Nullstellen auf ∂D_τ hat, rechnet man mit Satz 5.15 dass

$$\int_{\partial D_\tau} \frac{f'}{f}(z)dz = 2\pi i(\#\text{Nullstellen} - \#\text{Pole}). \tag{7.3}$$

Da f'/f doppelperiodisch ist, ist das Integral 0.

Sonst betrachtet man $\hat{f}(z) = f(z+\delta)$ für ein passendes $\delta \in \mathbb{C}$. □

Wie kann man eine doppelperiodische Funktion konstruieren? Wir wissen dass sie in D_τ mindestens zwei Polstellen haben soll. Sagen wir mal dass beide in 0 liegen, das wäre die Funktion $1/z^2$. Um sie doppelperiodisch zu machen könnte man die folgende Summe nehmen:

$$\sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+h+\tau k)^2}.$$

Das Problem mit dieser Konstruktion ist dass diese Summe nicht absolut konvergiert. Man kann das reparieren indem man eine bestimmte Summationsordnung verwendet:

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{h,k\in\mathbb{Z}:|h+\tau k|<R} \frac{1}{(z+h+\tau k)^2},$$

dieser Grenzwert existiert lokal gleichmäßig. Es gibt aber einen einfacheren Weg: wir ziehen von jedem Summanden seinen Wert in 0 ab.

Definition 7.5. *Sei $\tau \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Wir definieren die Weierstraßsche $\wp$-Funktion als*

$$\begin{aligned} \wp(z) =& \frac{1}{z^2} + \sum_{(h,k)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z+h+\tau k)^2} - \frac{1}{(h+\tau k)^2}\right) && (7.4)\\ =& \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Lambda_\tau\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2}\right). && (7.5)\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig, weil

$$\frac{1}{(z+w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{-z^2-2zw}{w^2(z+w)^2} = O(|w|^{-3}).$$

Die Funktion $\wp$ hängt von der Periode τ ab; diese Abhängigkeit notieren wir nicht.

Lemma 7.6. *$\wp$ ist 1 und τ-periodisch; ihre Polstellen sind Λ_τ, die Ordnung ist 2, $\wp$ ist gerade.*

Beweis. Da die Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, können wir termweise differenzieren:

$$\wp'(z) = -2\sum_{w\in\Lambda_\tau} \frac{1}{(z+w)^3}. \tag{7.6}$$

Daraus folgt insbesondere dass $\wp'$ doppelperiodisch ist. Für z in einer Umgebung von $\tau/2$ haben wir

$$\wp(z+1) = \wp(z) + \int_{(z,\tau/2)} \wp'(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{(\tau/2,\tau/2+1)} \wp'(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{(\tau/2+1,z+1)} \wp'(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{7.7}$$

Da $\wp'$ 1-periodisch ist, verschwindet die Summe des ersten und des letzten Integrals. Deshalb haben wir

$$a := \int_{(\tau/2,\tau/2+1)} \wp'(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \wp(z+1) - \wp(z).$$

Da a nicht von z abhängt, gilt nach analytischer Fortsetzung

$$\wp(z+1) = \wp(z) + a \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aus der Definition folgt $\wp(z) = \wp(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und insbesondere $\wp(1/2) = \wp(-1/2)$. Deshalb ist $a = 0$, also ist $\wp$ 1-periodisch.

Der Beweis dass $\wp$ τ-periodisch ist geht analog. $\square$

Eine Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *gerade* falls $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und *ungerade* falls $f(z) = -f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 7.7. *Sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, f elliptisch.*

(i) Wenn f gerade ist, dann gibt es Polynome p und q so dass $f = p(\wp)/q(\wp)$.

(ii) Im Allgemeinen gibt es Polynome p und q so dass $f = p(\wp, \wp')/q(\wp)$.

Beweis. Teil (ii) folgt aus Teil (i), denn eine allgemeine Funktion f lässt sich als Kombination der geraden Funktionen $(f(z) + f(-z))/2$ und $(f(z) - f(-z))/2\wp'(z)$ schreiben (man beachte dass $\wp'$ ungerade ist).

Wir zeigen also Teil (i). Falls 0 eine Nullstelle oder Polstelle von f ist, dann ist die Ordnung gerade (weil f gerade ist). Deshalb gibt es $m \in \mathbb{Z}$ so dass $f^* = \wp^m f$ in 0 weder Nullstelle noch Polstelle hat. Also nehmen wir ObdA $f(0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ an.

Für $c \in D_\tau \setminus \{0\}$ hat die Funktion $z \mapsto \wp(z) - \wp(c)$ auf $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ genau zwei einfache Nullstellen in $\pm c$ wenn $c \notin \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}$. Wenn $c \in \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}$, dann hat diese Funktion genau eine doppelte Nullstelle in c, da in diesem Fall $\wp'(c) = 0$, da $\wp'$ ungerade ist und $c \equiv -c \mod \Lambda_\tau$.

Da die Funktion f gerade ist, sind alle Ableitungen ungerader Ordnung $f^{(m)}$, m ungerade, ungerade Funktionen. Insbesodere haben wir $f^{(m)} = 0$ für $c \in \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}$. Deshalb kann f in diesen Punkten nur Nullstellen gerader Ordnung haben. Ein analoges Argument für $1/f$ zeigt dass f in diesen Punkten nur Pole gerader Ordnung haben kann.

Für $c \notin \{1/2, \tau/2, (1+\tau)/2\}$ hat f in c genau dann eine Null- bzw. Polstelle wenn f in $-c$ eine Null- bzw. Polstelle gleicher Ordnung hat.

Sei $2m$ die Ordnung von f. Nach dem obigen Argument können wir die Nullstellen (mit Vielfachheit) mit $w_1, -w_1, w_2, -w_2, \ldots, w_m, -w_m$ durchnummerieren und die Polstellen mit $z_1, -z_1, \ldots, z_m, -z_m$. Es folgt, dass

$$g(z) = \frac{\prod_{j=1}^m (\wp(z) - \wp(w_j))}{\prod_{j=1}^m (\wp(z) - \wp(z_j))} \tag{7.8}$$

die gleichen (mit Vielfachheit) Polstellen und Nullstellen wie f hat. Deshalb ist f/g konstant. $\square$

Beispiel. $(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - \wp(1/2))(\wp(z) - \wp(\tau/2))(\wp(z) - \wp((1+\tau)/2))$.

Um das zu sehen, bemerken wir dass $\wp'$ genau die 3 Nullstellen $1/2, \tau/2, (1+\tau)/2$ hat. Die Funktionen auf der linken und der rechten Seite haben also die gleichen Null- und Polstellen (mit Vielfachheit), unterscheiden sich also nur um einen multiplikativen Faktor. Der Faktor 4 ergibt sich daraus, dass $-2/z^3$ der Term niedrigster Ordnung in der Laurententwicklung von $\wp'$ um 0 ist und $1/z^2$ der Term niedrigster Ordnung in der Laurententwicklung von $\wp$ um 0 ist.

8 Spezielle Funktionen und Anwendungen

8.1 Die Γ Funktion

Definition 8.1. *Für $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, definiert man*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{8.1}$$

Hier $t^{z-1} = \exp((z-1)\ln t)$, $t \in \mathbb{R}$. Da $|t^{z-1}| = \exp((\operatorname{Re} z - 1)\ln t)$, gibt es für den Integranden auf jedem Streifen der Form $\{z \mid \epsilon < \operatorname{Re} z < R\}$ eine integrierbare Majorante. Aus dem Lemma von Goursat und dem satz von Morera folgt dass Γ auf $\{\operatorname{Re} > 0\}$ holomorph ist.

Lemma 8.2. *Für alle $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, gilt*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{8.2}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Beweis. Mit partieller Integration bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt \\
&= -\int_0^\infty (\partial_t e^{-t}) t^z dt \\
&= [-e^{-t} t^z]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-t} (\partial_t t^z) dt \\
&= 0 + \int_0^\infty e^{-t} (z t^{z-1}) dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Dies war die erste Aussage. Außerdem gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1,$$

daraus folgt die zweite Aussage. □

Lemma 8.3. *Es gibt eine eindeutige meromorphe Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ mit der Definition in* (8.1) *übereinstimmt.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung.

Um die existen zu zeigen, konstruieren wir eine Folge meromorpher Funktionen $\Gamma_k : \{\operatorname{Re} > -k\} \to \mathbb{C}^*$. Sei Γ_0 die Funktion die in (8.1) definiert wurde. Für $k \geq 0$ definieren wir $\Gamma_{k+1}(z) := \Gamma_k(z+1)/z$. Die Funktionen Γ_k und Γ_{k+1} stimmen nach Lemma 8.2 auf dem Definitionsbereich von Γ_k überein. Wir definieren dann $\Gamma(z)$ als den gemeinsamen Funktionswert $\Gamma_k(z)$ für $k > -\operatorname{Re} z$. □

Lemma 8.4. *Die Singularitäten von Γ sind genau die Punkte $-\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq 0\}$. Sie sind alle Pole der Ordnung* 1, *und*

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma = (-1)^n / n!. \tag{8.3}$$

Beweis. Sei A_k die Menge der Singularitäten von Γ_k in der obigen Konstruktion. Dann gilt $A_0 = \emptyset$ und $A_{k+1} = (A_k - 1) \cup \{0\}$. Man sieht auch dass alle diese Singularitäten einfache Pole sind.

Wir zeigen (8.3) per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Der Fall $n = 0$ folgt aus $\Gamma(1) = 1$ und der Funktionalgleichung (8.2). Für den Induktionsschritt benutzen wir ebenfalls (8.2):

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{-n-1}\Gamma(z) &= \operatorname{res}_{-n-1}\Gamma(z+1)z^{-1} = (-n-1)^{-1}\operatorname{res}_{-n-1}\Gamma(z+1)\\ &= -(n+1)^{-1}\operatorname{res}_{-n}\Gamma = -(n+1)^{-1}\cdot(-1)^n/n! = (-1)^{n+1}/(n+1)!.\end{aligned}$$

□

Lemma 8.5. *Es gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{8.4}$$

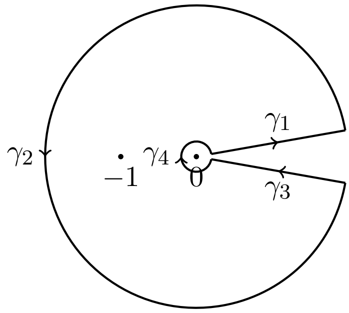
Beweis. Da beide Funktionen meromorph sind, reicht es Gleichheit für $z \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ zu beweisen. Für $t > 0$ gilt

$$\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{-z}du = t^{1-z}\int_0^\infty e^{-vt}v^{-z}dv. \tag{8.5}$$

Deshalb

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}t^{1-z}e^{-vt}v^{-z}dv\,dt\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty v^{-z}e^{-(1+v)t}dt\,dv\\ &= \int_0^\infty v^{-z}\frac{1}{1+v}dv.\end{aligned}$$

Um dieses Integral zu berechnen, benutzen wir den folgenden Integrationsweg:



Wir lassen den kleinen Radius gegen 0, den großen Radius gegen ∞, und den Öffnungswinkel gegen 0 gehen. Dann gehen die Integrale über γ_2, γ_4 gegen 0. Das Integral über γ_1 geht gegen das gesuchte Integral. Das Integral über γ_3 geht nicht gegen das gesuchte Integral, weil v^{-z} auf einem anderen Zweig des Logarithmus liegt. Wir bekommen also

$$\begin{aligned}(1-e^{-2\pi iz})\int_0^\infty v^{-z}\frac{1}{1+v}dv &= \lim\int_{\gamma_1} v^{-z}\frac{1}{1+v}dv + \lim\int_{\gamma_3} v^{-z}\frac{1}{1+v}dv\\ &= 2\pi i\operatorname{res}_{-1} v^{-z}\frac{1}{1+v} = 2\pi i e^{\pi i(-z)}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\int_0^\infty v^{-z}\frac{1}{1+v}dv = \frac{2\pi i e^{\pi i(-z)}}{1-e^{-2\pi iz}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

□

Korollar 8.6. *$z \mapsto 1/\Gamma(z)$ ist eine ganze Funktion, mit Nullstellen genau in $-\mathbb{N}$. Alle Nullstellen sind einfach.*

Beweis. Es reicht zu zeigen dass Γ keine Nullstellen hat. Wir wissen bereits dass Γ auf $\mathbb{Z}$ keine Nullstellen hat. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ haben wir aufgrund von (8.2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und da keiner der Faktoren eine Singularität in z hat, verschwindet auch keiner der beiden Faktoren. □

Korollar 8.7. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Indem wir in (8.4) $z = 1/2$ einsetzen, bekommen wir $\Gamma(1/2)^2 = \pi$. Außerdem ist $\Gamma(1/2) \geq 0$. □

Bemerkung. Man kann das mit einem Variablenwechsel auch direkter zeigen:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds.$$

Satz 8.8 (Stirlingformel)**.** *Für $s \to \infty$, $s \in \mathbb{R}$, haben wir*

$$\Gamma(s) = e^{s \ln s - s} \Big(\frac{\sqrt{2\pi}}{s^{1/2}} + O(|s|^{-1}) \Big).$$

Beweis. Zuerst führen wir einen Variablenwechsel durch um den Hauptterm zu erhalten:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-t+s\ln t} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty e^{-sx+s\ln(sx)} \frac{dx}{x} \\
&= e^{s\ln s - s} \int_0^\infty e^{-s(x-\ln x-1)} \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Sei

$$I(s) := \int_0^\infty e^{-s(x-\ln x-1)} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^\infty e^{-s(e^y-y-1)} dy.$$

Wir möchten zeigen dass

$$I(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s^{1/2}} + O(|s|^{-1}).$$

Sei $\Phi(y) := e^y - y - 1$. Dann ist $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ und $\partial_y^2 \Phi(y) = e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$I(s) - \frac{\sqrt{2\pi}}{s^{1/2}} = \int_{-\infty}^\infty (e^{-s(e^y-y-1)} - e^{-sy^2/2}) dy. \tag{8.6}$$

Wir unterteilen den Integrationsbereich. Sei $\alpha \leq cs^{-1/3}$, c klein. Auf $[-\alpha, \alpha]$ benutzen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\alpha}^{\alpha}(e^{-s(e^y-y-1)}-e^{-sy^2/2})dy\Big| \\
&\quad=\Big|\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-sy^2/2}(e^{-s(e^y-1-y-y^2/2)}-1-sy^3/6)dy\Big| \\
&\quad\le\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-sy^2/2}|e^{-s(e^y-1-y-y^2/2)}-1-sy^3/6|dy \\
&\quad\le C\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-sy^2/2}\big(|sy^3|^2+|-s(e^y-1-y-y^2/2)-sy^3/6|\big)dy \\
&\quad\le C\int_{-\alpha}^{\alpha}|y|^2+|sy^4|dy \\
&\quad\le C\alpha^3+Cs\alpha^5.
\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt dass $\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-sy^2/2}sy^3/6=0$ um $e^{-s\Phi(y)}$ bis zur dritten Ordnung zu approximieren.

Mit $\alpha=s^{-2/5}$ bekommen wir die gewünschte Abschätzung. Außerhalb von $[-\alpha,\alpha]$ benutzen wir die Abschätzung

$$\int_{\alpha}^{\infty}|e^{-s\Phi(y)}|dy\le\int_{\alpha}^{\infty}|e^{-s\Phi(\alpha)-s(y-\alpha)\Phi'(\alpha)}|dy=e^{-s\Phi(\alpha)}/(s\Phi'(\alpha))\le Ce^{-cs\alpha^2}/(s\alpha)\le C/s.$$

Hier kann man Φ auch durch $\Phi(-\cdot)$ oder durch $y^2/2$ ersetzen um die 4 Beiträge zu (8.6) mit $|y|>\alpha$ abzuschätzen. $\square$

Wir geben noch eine Formel für Γ an die auf ganz $\mathbb{C}$ gilt.

Lemma 8.9. *Für alle $z\in\mathbb{C}$ haben wir*

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{8.7}$$

Beweis. Das Problem mit der Formel (8.1) ist dass der Integrand für $\operatorname{Re}z\le 0$ nahe 0 nicht absolut integrierbar ist. Also spalten wir das Integral auf:

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Im ersten Term entwickeln wir die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt&=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}t^{z-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{z+n-1}dt \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\Big[\frac{t^{z+n}}{z+n}\Big]_{t=0}^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}.
\end{aligned}$$

Die Summe und das Integral können für $z>0$ vertauscht werden, da der Integrand in diesem Fall positiv und die rechte Seite absolut summierbar ist. Damit haben wir (8.7) für $z>0$ gezeigt, und nach analytischer Fortsetzung gilt diese Formel für alle $z\in\mathbb{C}$, da beide Seiten meromorphe Funktionen sind. $\square$

8.2 Die ζ Funktion

Definition 8.10. *Für* $\operatorname{Re}z>1$ *definiert man*

$$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}. \tag{8.8}$$

Bemerkung. Aus $|k^z| = k^{\operatorname{Re} z}$ folgt, dass die Summe (lokal gleichmäßig) absolut konvergiert und dass ζ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ holomorph ist.

Lemma 8.11 (Euler). *Für* $\operatorname{Re} z > 1$ *gilt*

$$\zeta(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_j^{-z}} \tag{8.9}$$

wobei $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Auflistung der Primzahlen ist (z.B.* $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \dots$*).*

Bemerkung. $\prod_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=0}^{N} a_i$.

Beweis. Seien $N, M \in \mathbb{N}$. Sei

$$A_{N,M} = \{p_0^{i_0} p_1^{i_1} \dots p_N^{i_N}, i_k \in \mathbb{N} \cap [0, M]\}. \tag{8.10}$$

Aus dem Umordnungssatz folgt, dass

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{k \in A_{N,M}} \frac{1}{k^s}. \tag{8.11}$$

Aber

$$\sum_{k\in A_{N,M}} \frac{1}{k^s} = \sum_{i_0=0}^{M} \cdots \sum_{i_N=0}^{M} \prod_{j=0}^{N} \frac{1}{p_j^{i_j s}} = \prod_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{M} \frac{1}{p_j^{is}}. \tag{8.12}$$

Deshalb

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k\in A_{N,M}} \frac{1}{k^s} = \prod_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^{is}} = \prod_{j=0}^{N} \frac{1}{1 - p_j^{-s}}. \tag{8.13}$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Aussage. □

Lemma 8.12. *Sei* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\sum_k |a_k| < \infty$. *Dann konvergiert*

$$A = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=0}^{N} (1 + a_k). \tag{8.14}$$

Wenn $1 + a_k \neq 0$ *für alle* k, *dann* $A \neq 0$.

Insbesondere $\zeta(z) \neq 0$ *für* $\operatorname{Re} z > 1$.

Beweis. Wir können annhemen, dass $a_k \in B_{1/2}$. Sei $b_k = \ln_{B_{1/2}(1)}(1 + a_k)$. Dann $|b_k| \leq 2|a_k|$ (weil $|\ln'(z)| = |1/z| \leq 2$). Sei $B = \sum_k b_k$. Da $\sum_k |a_k|$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_k b_k$ absolut. Aus der Stetigkeit von exp folgt $A = e^B \neq 0$. □

Lemma 8.13. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\operatorname{Re} z$ *gilt*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \tag{8.15}$$

Beweis. Mit der Substitution $t = n\tilde{t}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} n^{-s} t^{s-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \tilde{t}^{s-1} \sum_{n\geq 1} e^{-n\tilde{t}} d\tilde{t} \\ &= \int_0^{\infty} \tilde{t}^{s-1} \frac{1}{e^{\tilde{t}} - 1} d\tilde{t}.\end{aligned}$$

□

Definition 8.14. *Die* Eulerkonstante *ist*

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln N\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\Big) dx \tag{8.16}$$

Bemerkung. Der Grenzwert existiert in $\mathbb{R}$ weil

$$\left|\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln k)\right| = \left|\int_k^{k+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{x} dx\right| \leq \frac{c}{k^2}. \tag{8.17}$$

Satz 8.15. *(i) Die Funktion ζ kann zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, mit einer einzigen Polstelle in* 1.

(ii) Diese Polstelle ist einfach, und es gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \text{ für } s \to 1. \tag{8.18}$$

(iii) Die Funktion ζ hat einfache Nullstellen in $2\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-2, -4, -6, \dots\}$.

Bemerkung. Es wird hier *nicht* behauptet dass es keine weiteren Nullstellen gibt!

Beweis. Wir werden (8.15) benutzen. Ähnlich wie in Lemma 8.9, zerlegen wir

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1} dt + h(z), \quad h(z) = \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Die Funktion h ist eine ganze Funktion. Nun wollen wir den Integranden in eine Potenzreihe zerlegen. Dazu betrachten wir zunächst die Potenzreihe

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n. \tag{8.19}$$

Die Koeffizienten B_n heißen Bernoulli-Zahlen. Da die Funktion $e^z - 1$ hat einfache Nullstellen genau in $2\pi i\mathbb{Z}$, also hat die Funktion $z/(e^z - 1)$ einfache Pole genau in $2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Deshalb hat diese Reihe den Konvergenzradius 2π, und insbesondere

$$\sum_n \frac{|B_n|}{n!} < \infty. \tag{8.20}$$

Da die Funktion

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2} z = \frac{z(e^{z/2} + e^{-z/2})}{2(e^{z/2} - e^{-z/2})} \tag{8.21}$$

gerade ist, haben wir $B_n = 0$ für alle ungeraden $n > 1$. Außerdem ist $B_0 = \lim_{z\to 1} z/(e^z - 1) = 1$.

Nun können wir für $\operatorname{Re} s > 1$ folgendes berechnen:

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^{n+s-2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!(s+n-1)}. \tag{8.22}$$

Aus (8.20) folgt, dass diese Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \{1 - n : n \in \mathbb{N}, B_n \neq 0\}$ lokal gleichmäßig zu einer holomorphen Funktion konvergiert. Alle Pole sind in der Menge $\{1, 0, -1, -3, -5, \dots\}$ enthalten.

Aufgrund von (8.15) haben wir

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!(s+n-1)} + h(z)\Big). \tag{8.23}$$

Nach Korollar 8.6 ist $1/\Gamma$ eine holomorphe Funktion, folglich definiert diese Formel eine meromorphe Funktion. Sie hat Nullstellen in $-2, -4, -6, \ldots$ weil $1/\Gamma(z)$ dort Nulstellen hat und der zweite Faktor an diesen Stellen keine Pole hat. Sie kann nur einen Pol in 1 haben, weil alle anderen Pole der Klammer einfach sind und mit Nullstellen von $1/\Gamma$ zusammenfallen.

Es bleibt (8.18) zu zeigen. Da ζ meromorph ist, reicht es $s > 1$ zu betrachten. In diesem Fall haben wir

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} - \int_1^{\infty} t^{-s} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} (k^{-s} - t^{-s}) dt.\end{aligned}$$

Für den Integrand haben wir

$$|k^{-s} - t^{-s}| = |\int_k^t s u^{-s-1} du| \leq |s| k^{-s-1}.$$

Da diese Abschätzung für $s \in (1,2)$ gleichmäßig ist, können wir den Satz über dominierte Konvergenz benutzen, und erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \lim_{s\to 1}(k^{-s} - t^{-s}) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} (k^{-1} - t^{-1}) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-1} - \ln(k+1) + \ln(k)).\end{aligned}$$

□

Korollar 8.16. *Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Dann gilt*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty. \tag{8.24}$$

Beweis. Sei $s \in (1,2)$ und $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Dann gilt

$$\ln\zeta(s) = \ln \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = -\sum_p \ln(1-p^{-s}), \tag{8.25}$$

und deshalb

$$|\ln\zeta(s)| \leq \sum_p |\ln(1-p^{-s})| \leq 2\sum_p p^{-s} \leq 2\sum_p \frac{1}{p}. \tag{8.26}$$

Aufgrund von (8.18) geht die linke Seite dieser Ungleichung gegen ∞ wenn $s \to 1$. □

8.2.1 Nullstellenfreie Gebiete

Lemma 8.17. *Es gibt eine Folge* $a : \mathbb{N} \to [0,1]$ *so dass für* $\operatorname{Re} z > 1$ *gilt*

$$\ln \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}. \tag{8.27}$$

Die Funktion $\ln \zeta$ auf der linken Seite ist im Sinne von Satz 5.38 definiert, was möglich ist weil $\zeta \neq 0$ auf $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ nach Lemma 8.12.

Beweis. Da beide Seiten in (8.27) in $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ holomorph sind, reicht es, $z \in (1,2)$ zu betrachten. Wir wissen bereits, dass

$$\ln \zeta(z) = \ln \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-z}} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \ln \frac{1}{1-p^{-z}}. \tag{8.28}$$

Für $w \in B_1$ gilt

$$\ln \frac{1}{1-w} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m}. \tag{8.29}$$

Deshalb

$$\ln \zeta(z) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-zm}}{m}. \tag{8.30}$$

Da die Reihe absolut konvergiert, kann man sie umordnen. Die Koeffizienten sind

$$a_n = \begin{cases} 1/m & \text{falls } n = p^m \text{ mit einer Primzahl } p \in \mathbb{P} \text{ und } m \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Lemma 8.18. *Seien* $x \in (1, \infty)$, $y \in \mathbb{R}$. *Dann*

$$|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| \geq 1. \tag{8.31}$$

Beweis.

$$\ln |\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| = 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+iy)| + \ln|\zeta(x+2iy)| \tag{8.32}$$

$$= 3\operatorname{Re}\ln\zeta(x) + 4\operatorname{Re}\ln\zeta(x+iy) + \operatorname{Re}\ln\zeta(x+2iy). \tag{8.33}$$

Wir setzen (8.27) ein. Mit

$$n^{-(x+iy)} = n^{-x} e^{-iy\ln n} \tag{8.34}$$

folgt

$$\ln |\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| = \operatorname{Re} \sum_n \frac{a_n}{n^x}(3 + 4e^{-iy\ln n} + e^{-2iy\ln n}). \tag{8.35}$$

Alle Summanden sind positiv weil $a_n \geq 0$, und für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ haben wir

$$2\operatorname{Re}(3 + 4e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) = 6 + 4e^{-i\theta} + 4e^{i\theta} + e^{-2i\theta} + e^{2i\theta} = (2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2.$$

□

Satz 8.19. *Für* $\operatorname{Re} z \geq 1$ *gilt* $\zeta(z) \neq 0$.

Beweis. Für $\operatorname{Re} z > 1$ wurde dies bereits in Lemma 8.12 bewiesen. Für $z = 1$ haben wir $\zeta(1) = \infty$.

Falls $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\zeta(1+iy) = 0$ existieren würde, dann wäre

$$|\zeta(x+iy)|^4 \leq c(x-1)^4 \text{ für } x \to 1. \tag{8.36}$$

Aus Satz 8.15 wissen wir, dass

$$|\zeta(x)|^3 \leq c(x-1)^{-3} \text{ für } x \to 1. \tag{8.37}$$

Da $y \neq 0$, hat ζ nach demselben Satz keine Singularität in $1 + 2iy$, deshalb

$$|\zeta(x+2iy)| \leq c \text{ für } x \to 1. \tag{8.38}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to 1} |\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)| = 0, \tag{8.39}$$

im Widerspruch zu Lemma 8.18. □

8.2.2 Wachstumsschranken

Wir verfeinern die qualitative Aussage dass ζ auf $\{\mathrm{Re} \geq 1\}$ nicht verschwindet zu einer quantitativen Aussage, nämlich einer unteren Schranke für $|\zeta|$. Dafür benötigen wir zuerst obere Schranken an ζ und ζ'.

Lemma 8.20. *Für jedes $\sigma \in (0,1)$ gibt es ein $C_\sigma < \infty$ so dass*

$$|\zeta(z)| \leq C_\sigma |\operatorname{Im} z|^{1-\sigma} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z \geq \sigma \text{ und } |\operatorname{Im} z| \geq 1/2. \tag{8.40}$$

Beweis. Für $\operatorname{Re} z \geq 2$ gilt

$$|\zeta(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|k^z|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = C, \tag{8.41}$$

es reicht also z mit $\operatorname{Re} z \in (0,2)$ anzuschauen. In diesem Fall haben wir

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 2 + |\operatorname{Im} z| \leq 5|\operatorname{Im} z|.$$

Wir benutzen die Formel

$$\zeta(z) - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\Big) dx, \tag{8.42}$$

die wir bereits für $\operatorname{Re} z > 1$ gezeigt haben. Für $\operatorname{Re} z > 0$ und $n \leq x \leq n+1$ gilt

$$\Big|\frac{1}{n^z} - \frac{1}{x^z}\Big| \leq \min(2n^{-\operatorname{Re} z}, |z| n^{-\operatorname{Re} z - 1}),$$

und insbesondere definiert die rechte Seite von (8.42) eine holomorphe Funktion auf $\{\mathrm{Re} > 0\}$, sodass die Formel (8.42) nach analytischer Fortsetzung ebenfalls auf $\{\mathrm{Re} > 0\}$ gilt. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\Big|\zeta(z) - \frac{1}{z-1}\Big| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \min(2n^{-\operatorname{Re} z}, |z| n^{-\operatorname{Re} z - 1}) \\
&\leq 2 \sum_{n \leq |z|} n^{-\sigma} + |z| \sum_{n \geq |z|} n^{-\sigma-1} \\
&\leq C|z|^{-\sigma+1}/(1-\sigma) + |z| C |z|^{-\sigma}/\sigma \\
&\leq C_\sigma |z|^{-\sigma+1}. \leq C_\sigma |5 \operatorname{Im} z|^{-\sigma+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist (8.40) gezeigt. □

Lemma 8.21. *Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon < \infty$ sodass*

$$|\zeta'(z)| \leq C_\epsilon |\operatorname{Im} z|^{\varepsilon} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Im} z| \geq 1. \tag{8.43}$$

Beweis. Es reicht, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ zu betrachten. Sei $\sigma = 1 - \epsilon$ und C_σ wie in (8.40). Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \geq 1$ und $|\operatorname{Im} z| \geq 1$. Dann gilt nach der Cauchy–Integralformel

$$\begin{aligned}
|\zeta'(z)| &= \Big|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\zeta(z+w)}{w^2} dw\Big| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} |\zeta(z + \varepsilon e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} C_\sigma |\operatorname{Im} z + \varepsilon e^{i\theta}|^{1-\sigma} d\theta \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} C_\sigma (|\operatorname{Im} z| + 1/2)^{1-\sigma} \\
&\leq \frac{2C_\sigma}{\varepsilon} |\operatorname{Im} z|^{\epsilon}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.22. *Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $c > 0$ so dass*

$$\left|\frac{1}{\zeta(z)}\right| \leq c|\operatorname{Im} z|^{\varepsilon} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Im} z| \geq 1. \tag{8.44}$$

Beweis. Aus der Definition von ζ folgt, dass für alle $x > 1$ gilt

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^x} dt = 1 + \frac{1}{x-1} \leq \frac{x}{x-1}. \tag{8.45}$$

Aus Lemma 8.20 folgt, dass für $x \geq 1$, $|y| \geq 1$ gilt $|\zeta|(x + 2iy) \leq c|y|^{\varepsilon}$. Aus Lemma 8.18 folgt dann, dass

$$1 \leq C|\zeta(x+iy)|^4 \frac{x^3}{(x-1)^3} |y|^{\varepsilon}. \tag{8.46}$$

Insbesodere gilt für alle $x, |y| \geq 1$

$$|\zeta(x+iy)| \geq c \frac{(x-1)^{3/4}}{x^{3/4}|y|^{\varepsilon/4}}. \tag{8.47}$$

Diese Abschätzung ist für x sehr nah an 1 unbrauchbar. Dieses Problem beheben wir indem wir zu z ein kleines reelles $\tilde{x} < 1$ addieren:

$$\begin{aligned}
|\zeta(x+iy)| &\geq |\zeta(x+\tilde{x}+iy)| - |\zeta(x+iy) - \zeta(x+\tilde{x}+iy)| \\
&\geq c\frac{\tilde{x}^{3/4}}{y^{\varepsilon/4}} - \tilde{x} \sup_{t \in (0,\tilde{x})} |\zeta'(x+iy+t)|. \\
&\geq c\frac{\tilde{x}^{3/4}}{|y|^{\varepsilon/4}} - \tilde{x} C_{\epsilon/4}|y|^{\epsilon/4},
\end{aligned}$$

wobei wir Lemma 8.21 benutzt haben. Nun wählen wir $\tilde{x} = (c/(2C_{\epsilon/4}))^4|y|^{-2\epsilon}$. Dies liefert die Abschätzung

$$|\zeta(x+iy)| \geq 2^{-4}c^4/C_{\epsilon/4}^3|y|^{-7\epsilon/4}. \qquad \square$$

8.3 Primzahlsatz

Definition 8.23. *Seien $f, g : (1,\infty) \to \mathbb{C}$. Wir sagen dass $f \sim g$ für $x \to \infty$ (f und g sind asymptotisch äquivalent) falls*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{8.48}$$

Satz 8.24. *Sei $\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \cap [0,x]\}$ die Primzahlzählfunktion ($\mathbb{P}$ ist die Menge der Primzahlen). Dann gilt $\pi(x) \sim x/\ln x$, d.h.,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1. \tag{8.49}$$

Definition 8.25. *Die* von Mangoldt-Funktion *ist*

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \ln p, & \text{falls } n = p^m \text{ mit } p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}, m \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8.50}$$

Man definiert, für $x \geq 1$,

$$\psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n), \tag{8.51}$$

$$\psi_1(x) := \int_1^x \psi(t)dt. \tag{8.52}$$

Lemma 8.26. *Es gilt*

$$\psi(x) \sim x \implies \pi(x) \sim x/\ln x.$$

Beweis. Da $p^m \leq x \iff m \leq \ln x/\ln p$, können wir

$$\psi(x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m\geq 1: p^m\leq x} \ln p = \sum_{p:p\leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \tag{8.53}$$

schreiben. Daraus folgt, dass

$$\psi(x) \leq \sum_{p\leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \sum_{p\leq x} \ln x = \pi(x) \ln x, \tag{8.54}$$

deshalb $1 \leq \liminf \psi(x)/x \leq \liminf \pi(x)/(x/\ln x)$.

Um die andere Ungleichung zu zeigen, sei $\alpha \in (0,1)$. Dann

$$\psi(x) \geq \sum_{p\leq x} \ln p \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \ln p \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \ln(x^\alpha). \tag{8.55}$$

Daraus folgt

$$\pi(x) \ln x^\alpha \leq \psi(x) + \pi(x^\alpha) \ln x^\alpha. \tag{8.56}$$

Mit $\pi(x^\alpha) \leq x^\alpha$ folgt

$$\alpha \limsup \frac{\pi(x)\ln x}{x} \leq \limsup \frac{\psi(x) + \pi(x^\alpha)\alpha \ln x}{x} \leq 1 + \limsup \frac{x^\alpha \alpha \ln x}{x} = 1. \tag{8.57}$$

Mit $\alpha \to 1$ ist der Beweis beendet. □

Lemma 8.27. *Es gilt*

$$\psi_1(x) \sim x^2/2 \implies \psi(x) \sim x$$

Beweis. Aus der Monotonie von ψ folgt, dass für $0 < \alpha < 1 < \beta$ gilt

$$\frac{1}{(1-\alpha)x}\int_{\alpha x}^{x}\psi(t)dt \le \psi(x) \le \frac{1}{(\beta-1)x}\int_{x}^{\beta x}\psi(t)dt. \tag{8.58}$$

Daraus folgt

$$\frac{\psi_1(x)-\psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} \le \frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\psi_1(\beta x)-\psi_1(x)}{(\beta-1)x^2} \tag{8.59}$$

und deshalb

$$\limsup \frac{\psi(x)}{x} \le \limsup \frac{\psi_1(\beta x)-\psi_1(x)}{(\beta-1)x^2} = \frac{\beta^2-1}{2(\beta-1)} = \frac{\beta+1}{2} \tag{8.60}$$

sowie

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{1-\alpha^2}{2(1-\alpha)} = \liminf \frac{\psi_1(x)-\psi_1(\alpha x)}{(1-\alpha)x^2} \le \liminf \frac{\psi(x)}{x}. \tag{8.61}$$

Mit $\alpha \to 1$, $\beta \to 1$ ist die Aussage bewiesen. □

Lemma 8.28. *Für $x > 1$ und $\sigma > 1$ gilt*

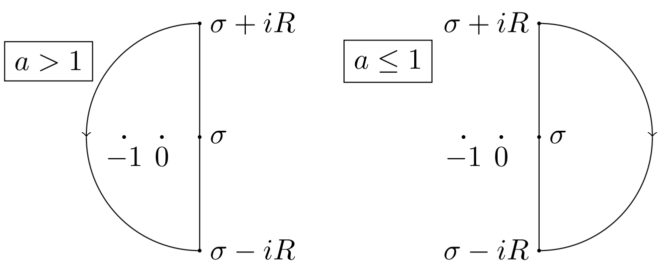
$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{-x^{s+1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds. \tag{8.62}$$

Das Integralzeichen bedeutet $\lim_{M\to\infty}\int_{\gamma_M} ds$, wobei $\gamma_M(t) = \sigma + iMt$, für $t \in [-1,1]$. Im Beweis wird insbesondere gezeigt, dass das Integral existiert.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass für $\sigma > 0$ und $a > 0$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)}ds = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in (0,1], \\ 1-\frac{1}{a} & \text{falls } a > 1. \end{cases} \tag{8.63}$$

Dazu benutzen wir den Residuensatz mit den folgenden Integrationswegen:



und berechnen die Residuen:

$$\mathrm{res}_{s=0}\frac{a^s}{s(s+1)} = 1, \quad \mathrm{res}_{s=-1}\frac{a^s}{s(s+1)} = a^{-1}/(-1) = -1/a.$$

Die Integrale über die Kreise gegen $\to 0$ für $R \to \infty$ weil der Wert der Funktion auf den Kreisen mit $O(R^{-2})$ abfällt.

Für $x > 1$ haben wir

$$\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt = \int_1^x \sum_{n\le t}\Lambda(n)dt = \sum_{n\le x}\Lambda(n)\int_1^x \mathbf{1}_{n\le t}dt = \sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n). \tag{8.64}$$

Wir haben in (8.30) gezeigt dass, für $\mathrm{Re}\, z > 1$,

$$\ln\zeta(z) = \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_m \frac{p^{-zm}}{m}. \tag{8.65}$$

Daraus folgt

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(z) = -\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{m} p^{-zm}\ln p = -\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\Lambda(n)}{n^z}. \tag{8.66}$$

Dann folgt, mit (8.63),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{-x^{s+1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds \tag{8.67}$$

$$= \sum_{n}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi i}x\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(x/n)^s}{s(s+1)}ds \tag{8.68}$$

$$= \sum_{n:n\leq x}\Lambda(n)x(1-\frac{n}{x}) \tag{8.69}$$

$$= \sum_{n:n\leq x}\Lambda(n)(x-n) = \psi_1(x). \tag{8.70}$$

□

Lemma 8.29. *Es gilt*

$$\psi_1(x) \sim x^2/2.$$

Beweis. Sei

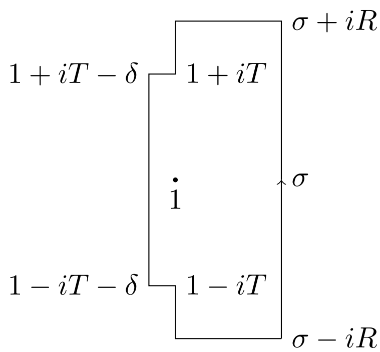
$$F(z) = \frac{-x^{z+1}}{z(z+1)}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \tag{8.71}$$

der Integrand in (8.62). Für $\sigma > 1$ haben wir dann

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(z)dz.$$

Die Funktion F ist auf $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ meromorph, und holomorph auf $\{z : \operatorname{Re} z \geq 1\} \setminus \{1\}$ (Satz 8.15 und Satz 8.19).

Seien $T \geq 3$ und $\delta > 0$. Wir benutzen den folgenden Integrationsweg um dieses Integral auszuwerten:



Der wichtigste Beitrag zu diesem Kurvenintegral kommt von der Singularität in 1. Aus (8.18) folgt

$$\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{(s-1)^{-2}+O(1)}{(s-1)^{-1}+O(1)} = \frac{1}{s-1}+O(1) \quad \text{für } s\to 1, \tag{8.72}$$

und deshalb

$$\operatorname{res}_1 F = x^2/2.$$

Sei $\eta > 0$. Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Für $\operatorname{Re} z \geq 1$ und $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ gilt $|\zeta'/\zeta|(z) \leq c|\operatorname{Im} z|^{2\varepsilon}$ (Lemma 8.20 und Lemma 8.21), und damit

$$|F(z)| \leq C\frac{x^{\operatorname{Re} z+1}}{|z(z+1)|}|\operatorname{Im} z|^{2\varepsilon} \leq Cx^{\operatorname{Re} z+1}|\operatorname{Im} z|^{2\varepsilon-2}.$$

Es folgt $\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma+iR}^{1+iR} F(z)dz = 0$. Außerdem können wir $T > 3$ so wählen, dass

$$\left|\int_{[1+iT,1+iR]} F(s)ds\right| \leq Cx^2 \int_T^\infty \frac{t^{2\varepsilon}}{t^2}dt = Cx^2\frac{T^{-1+2\epsilon}}{1-2\epsilon} < \eta x^2 \tag{8.73}$$

für alle $R > T$.

Da ζ auf $\{\mathrm{Re} \geq 1\}$ nicht verschwindet, können wir für ein gegebenes T ein so kleines δ wählen dass die Funktion F keine weiteren Singularitäten mit nichtverschwindender Windungszahl hat.

Für s auf dem Abschnitt des Integrationswegs zwischen $1 + iT$ und $1 - iT$ gilt $|F(s)| \leq C_{\delta,T}|x|^{1+\mathrm{Re}\, s}$. Daraus folgt

$$\left|\int_{[1-\delta-iT,1-\delta+iT]} F(s)ds\right| \leq 2TC_{\delta,T}x^{2-\delta} \tag{8.74}$$

und

$$\begin{aligned}\left|\int_{[1-\delta+iT,1+iT]} F(s)ds\right| &\leq C_{\delta,T}\int_{1-\delta}^1 x^{1+t}dt\\ &= C_{\delta,T}\int_{1-\delta}^1 \exp((1+t)\ln x)dt\\ &= C_{\delta,T}\Big[\frac{\exp((1+t)\ln x)}{\ln x}\Big]_{t=1-\delta}^1 \leq C_{\delta,T}\frac{x^2}{\ln x}.\end{aligned}$$

Deshalb

$$\left|\psi_1(x) - \frac{x^2}{2}\right| \leq \eta x^2 + 2TC_{\delta,T}x^{2-\delta} + 2C_{\delta,T}\frac{x^2}{\ln x}. \tag{8.75}$$

Da η beliebig klein war, folgt daraus die Behauptung. □

Bemerkung (Riemannsche Vermutung). Wenn wir wüssten dass ζ keine Nullstellen mit $\mathrm{Re} \geq \sigma$ für ein $\sigma < 1$ hat, dann könnten wir einen Integrationsweg mit $\mathrm{Re} = \sigma$ verwenden. Der Fehlerterm $o(x^2)$ in (8.75) würde dadurch zu $O(x^{1+\sigma})$ verbessert. Die Riemannsche Vermutung besagt dass dies für alle $\sigma > 1/2$ gilt.

9 Produktformeln für ganze Funktionen

9.1 Weierstraß–Produktformel

Wir möchten zu einer gegebenen Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ eine ganze Funktion konstruieren die genau auf A verschwindet und keine weiteren Nullstellen hat. Dies wird von Nutzen sein um neue Darstellungen für bekannte Funktionen zu gewinnen.

Aufgrund des Satzes über analytische Fortsetzung (Lemma 4.12) ist eine notwendige Bedingung an die Menge A dass sie diskret ist. Falls $A = \{a_1, \dots, a_N\}$ endlich ist, dann können wir $f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_N)$ nehmen. Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ unendlich und diskret. Wir können dann eine Aufzählung $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ wählen (wir erlauben Wiederholungen in dieser Folge um auch mehrfache Nullstellen abzudecken). Das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - a_n)$$

wird aber für keine dieser Aufzählungen konvergieren, weil notwendigerweise $|a_n| \to \infty$, und deshalb auch $|z - a_n| \to \infty$ für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ und $n \to \infty$ gilt. ObdA $a_n \neq 0$ für alle n. Wenn die Folge $1/a_n$ absolut summierbar ist, dann können wir das obige Produkt ändern zu

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n).$$

Dieses Produkt konvergiert dann nach Lemma 8.12 lokal gleichmäßig und definiert eine ganze Funktion mit Nullstellen genau in den Punkten a_n. Für allgemeine Folgen (a_n) suchen wir nun nach einer anderen Produktdarstellung von der Form

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n).$$

Jedes E_n soll eine ganze Funktion mit genau einer einfache Nullstelle in 1 sein. Deshalb muss E_n von der Form $(1 - z)e^{g(z)}$ sein (Satz 5.38). Außerdem soll $1 - E_n(z)$ klein sein, da wir das Kriterium in Lemma 8.12 verwenden möchten um die Konvergenz zu überprüfen. Sei

$$E_n(z) := (1 - z) \exp(z + z^2/2 + \dots + z^n/n). \tag{9.1}$$

Wir benutzen diese Funktionen weil $E_n - 1$ Nullstellen der Ordnung $n + 1$ in 0 haben. Wir haben sogar eine gleichmäßige Abschätzung:

Lemma 9.1. *Es gibt ein $c < \infty$ sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|1 - E_n(z)| \leq c|z|^{n+1}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E_n(z) &= \exp\bigl(\ln(1 - z) + z + \ldots + z^n/n\bigr) \\ &= \exp\bigl(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} + z + \ldots + z^n/n\bigr) \\ &= \exp\bigl(-\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k}\bigr). \end{aligned}$$

Da die Reihe für $|z| \leq 1/2$ gleichmäßig beschränkt ist und exp eine lokal beschränkte Ableitung hat, folgt

$$|1 - E_n(z)| \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \leq C|z|^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} |1/2|^k \leq 2C|z|^{n+1}. \qquad \square$$

Satz 9.2. *Seien E_n wie in* (9.1) *und* (a_n) *eine Folge in* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $|a_n| \to \infty$. *Dann ist*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n) \tag{9.2}$$

eine ganze Funktion deren Nullstellen (mit Vielfachheit) $a_1, a_2, \ldots$ *sind.*

Beweis. Es reicht das Konvergenzkriterium in Lemma 8.12 lokal gleichmässig zu überprüfen. Sei $R > 0$ und sei n_0 so, dass für jedes $n > n_0$ $|a_n| > 2R$ gilt. Dann haben wir, für $|z| < R$,

$$\sum_{n>n_0} |1 - E_n(z/a_n)| \leq c \sum_{n>n_0} |z/a_n|^{n+1} \leq c \sum_{n>n_0} |1/2|^{n+1} < \infty.$$

Also konvergiert das unendliche Produkt lokal gleichmäßig. □

9.2 Wachstumsordnung ganzer Funktionen

Definition 9.3. *Eine ganze Funktion g hat* (untere) Wachstumsordnung $\leq \rho$ *wenn Konstanten A, B existieren sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ (bzw. $\forall r > 0\ \exists R > r\ \forall z \in \mathbb{C} : |z| = R$) gilt*

$$|g(z)| \leq A \exp(B|z|^\rho)$$

Die Wachstumsordnung von g *ist das Infimum aller solchen ρ.*

Lemma 9.4. *Sei g eine ganze Funktion mit*

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-s} \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z) < \infty, \quad s \geq 0.$$

Dann ist g ein Polynom vom Grad $\leq s$.

Wir haben bereits eine ähnliche Aussage mit $|g(z)|$ an der Stelle von $\operatorname{Re} g(z)$ gezeigt. Mit $|\operatorname{Re} z|$ wäre dies eine relativ einfache Variante dieser früheren Aussage, ohne Betrag wird es aber etwas schwieriger.

Beweis. Sei $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenzerlegung von g. Dann gilt

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{g(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Mit $n = 0$ bekommen wir

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

Weiterhin haben wir für $n > 0$ nach dem Cauchy–Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{in\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} g(z) z^{n-1} \mathrm{d}z = 0.$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) e^{-in\theta} + \overline{g(re^{i\theta}) e^{in\theta}} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{r^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} g(re^{i\theta})) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{r^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} g(re^{i\theta}) - C_r) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

für beliebiges C_r. Wir wählen $C_r = \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|a_n| &\le \frac{r^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} g(re^{i\theta}) - C_r| \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} (C_r - \operatorname{Re} g(re^{i\theta})) \mathrm{d}\theta \\
&= 2r^{-n}C_r - \frac{r^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \\
&= 2r^{-n}C_r - r^{-n}2\operatorname{Re} a_0.
\end{aligned}$$

Wenn $n > s$, verschwindet $\liminf_{r\to\infty}$ der rechten Seite nach Voraussetzung. □

Korollar 9.5. *Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine ganze Funktion mit unterer Wachstumsordnung $\le \rho$. Dann existiert ein Polynom p vom Grad $\le \rho$ sodass $g(z) = e^{p(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Nach Satz 5.38 existiert eine ganze Funktion p mit $g(z) = e^{p(z)}$. Nach Voraussetzung gibt es beliebig große r sodass $|\exp(p(z))| \le A\exp(B|z|^\rho)$ für alle z mit $|z| = r$. Daraus folgt

$$\operatorname{Re} p(z) = \ln|\exp(p(z))| \le \ln A + B|z|^\rho.$$

Nach Lemma 9.4 ist p ein Polynom. □

Korollar 9.5 legt nahe in einer Produktdarstellung ganzer Funktionen mit Wachstumsordnung $\le \rho$ nur Faktoren E_n mit $n \le \rho$ zu benutzen. Um dies umzusetzen, müssen wir die Nullstellen zählen.

Lemma 9.6 (Jensensche Formel)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Man nehme an dass $\overline{B_R(0)} \subseteq \Omega$, $f(0) \neq 0$, und $f(z) \neq 0$ wenn $|z| = R$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_N$ die Nullstellen von f in $B_R(0)$ mit Vielfachheit. Dann gilt*

$$\ln|f(0)| = \sum_{k=1}^N \ln\frac{|a_k|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| dt.$$

Beweis. ObdA $R = 1$. Sei $\phi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\bar\alpha z}$ der Blaschkefaktor (das ist eine Möbioustransformation die ∂B_1 auf ∂B_1 und α nach 0 abbildet). Dann ist

$$f(z) = \tilde f(z)\prod_{k=1}^N \phi_{a_k}(z),$$

die Funktion $\tilde f$ hat keine Nullstellen in $\overline{B_1}$,

$$\tilde f(0) = f(0)\prod_{k=1}^N a_k^{-1},$$

und $|\tilde f| = |f|$ auf ∂B_1. Es reicht also das Lemma mit $\tilde f$ an Stelle von f zu zeigen. Dafür wenden wir den Cauchy–Integralsatz auf eine Funktion $g = \ln \tilde f$ an:

$$\ln|\tilde f(0)| = \operatorname{Re} g(0) = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{g(z)}{z}\mathrm{d}z = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\tilde f(e^{it})| \mathrm{d}t.$$

□

Korollar 9.7. *Sei g eine ganze Funktion mit Wachstumsordnung $\le \rho$ und $g(0) = 1$. Seien $a_1, \ldots$ die Nullstellen von g mit Vielfachheit. Dann gilt für jedes $s > \rho$*

$$\sum_k |a_k|^{-s} < \infty. \tag{9.3}$$

Beweis. Aus Lemma 9.6 und Definition der Wachstumsordnung folgt

$$\#\{a_k : |a_k| \leq R/e\} \leq \sum_{k:|a_k|\leq R} \ln \frac{R}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(Re^{it})| dt \leq \ln A + BR^\rho.$$

Die Behauptung folgt nun leicht:

$$\begin{aligned}
\sum_k |a_k|^{-s} &= \sum_{k:|a_k|<1} |a_k|^{-s} + \sum_m \sum_{k:e^m\leq|a_k|<e^{m+1}} |a_k|^{-s} \\
&\leq \sum_{k:|a_k|<1} |a_k|^{-s} + \sum_m e^{-ms} \#\{a_k : |a_k| \leq e^{m+2}/e\} \\
&\leq \sum_{k:|a_k|<1} |a_k|^{-s} + \sum_m e^{-ms} (\ln A + Be^{(m+2)\rho}).
\end{aligned}$$

□

9.3 Hadamardscher Faktorisierungssatz

Man nehme nun an dass (9.3) gilt. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $s < k + 1$. Dann konvergiert

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n).$$

Sei $R > 0$ und sei n_0 so, dass für jedes $n > n_0$ $|a_n| > 2R$ gilt. Dann haben wir, für $|z| < R$,

$$\sum_{n>n_0} |1 - E_k(z/a_n)| \leq c \sum_{n>n_0} |z/a_n|^{k+1} \leq C|z|^{k+1}.$$

Also konvergiert das unendliche Produkt lokal gleichmäßig. Wir werden zeigen dass 1/ dieses Produkt Wachstumsordnung $< k + 1$ hat. Daraus wir der folgende Satz folgen:

Satz 9.8. *Sei g eine ganze Funktion mit Wachstumsordnung $< k + 1$. Dann gilt*

$$g(z) = e^{p(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n),$$

wobei $a_n \neq 0$ die Nullstellen von g mit Vielfachheit sind und p ein Polynom von Grad $\leq k$.

Beweis. ObdA $g(0) \neq 0$. Nach Korollar 9.7 gilt (9.3) für ein $s < k + 1$. Nach obiger Rechnung ist

$$g(z) \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n)^{-1}$$

eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Wenn sie untere Wachstumsordnung $< k+1$ hat, dann ist sie von der Form $e^{p(z)}$ mit Polynom p vom Grad $< k+1$ nach Korollar 9.5. □

Es bleibt noch folgendes zu zeigen:

Lemma 9.9. *Man nehme an dass* (9.3) *gilt. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq s < \tilde{s} < k + 1$. Dann gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty} |E_k(z/a_n)|^{-1} \leq \exp(C|z|^{\tilde{s}})$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a_n| \geq |a_n| \exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s})$ für alle n.

Beweis. Wir teilen das produkt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}|E_k(z/a_n)|^{-1} = \prod_{n:|a_n|<2|z|}|E_k(z/a_n)|^{-1} \cdot \prod_{n:|a_n|\geq 2|z|}|E_k(z/a_n)|^{-1}$$

und fangen mit der Abschätzung für das zweite Teilprodukt an. Für $|z| \leq 1/2$ gilt

$$|E_k(z)| = |\exp(-\sum_{l\geq k+1} z^l/l)| \geq \exp(-\sum_{l\geq k+1}|z|^l/l) \geq \exp(-2|z|^{k+1}),$$

da

$$\sum_{l\geq k+1}|z|^l/l \leq |z|^{k+1}\sum_{l\geq 0}|z|^l/(k+1) \leq |z|^{k+1}\sum_{l\geq 0}2^{-l}/(k+1) \leq 2|z|^{k+1}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\prod_{n:|a_n|\geq 2|z|}|E_k(z/a_n)|^{-1} \leq \prod_{n:|a_n|\geq 2|z|}\exp(2|z/a_n|^{k+1}) &= \exp(2\sum_{n:|a_n|\geq 2|z|}|z/a_n|^{k+1}) \\ &\leq \exp(2\sum_{n:|a_n|\geq 2|z|}|z/a_n|^{s}) \leq \exp(C|z|^s).\end{aligned}$$

Für $|z| \geq 1/2$ gilt

$$|E_k(z)| = |1-z||\exp(z+\cdots+z^k/k)| \geq |1-z|\exp(-C|z|^k).$$

Im Fall $|z-a_n| > |a_n|\exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s})$, $|a_n| < 2|z|$ bekommen wir also

$$|E_k(z/a_n)| \geq \exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s})\exp(-C|z/a_n|^k) \geq \exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s})\exp(-C|z/a_n|^s).$$

Es folgt dass

$$\begin{aligned}\prod_{n:|a_n|<2|z|}|E_k(z/a_n)|^{-1} &\leq \prod_{n:|a_n|<2|z|}\exp(|a_n|^{\tilde{s}-s})\exp(C|z/a_n|^s) \\ &\leq \Big(\prod_{n:|a_n|<2|z|}\exp(|2z|^{\tilde{s}-s})\Big)\Big(\exp(\sum_{n:|a_n|<2|z|}|z/a_n|^s)\Big) \\ &\leq \Big(\exp(|2z|^{\tilde{s}-s}\#\{n : |a_n| < 2|z|\})\Big)\exp(C|z|^s) \\ &\leq \Big(\exp(|2z|^{\tilde{s}-s}C|2z|^s\Big)\exp(C|z|^s) \\ &\leq \exp(C|z|^{\tilde{s}}).\end{aligned}$$

□

Um Lemma 9.4 verwenden zu können, müssen wir noch zeigen dass es beliebig große r mit

$$\partial B_r \subseteq \mathbb{C}\setminus \cup_{n=1}^{\infty}B_{\rho_n}(a_n), \quad \rho_n := |a_n|\exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s}).$$

gibt. Das liegt daran dass

$$\sum_n |a_n|\exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s}) \leq \sum_{n:|a_n|\leq 2}|a_n|\exp(-|a_n|^{\tilde{s}-s}) + C\sum_{n:|a_n|\geq 2}|a_n||a_n|^{-s-1} < \infty$$

ist. Wir haben

$$\begin{aligned}\{r : \partial B_r \nsubseteq \mathbb{C}\setminus\cup_{n=1}^{\infty}B_{\rho_n}(a_n)\} &= \cup_{n=1}^{\infty}\{r : \partial B_r \cap B_{\rho_n}(a_n) \neq \emptyset\} \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\{r : |r-|a_n|| \leq \rho_n\},\end{aligned}$$

das ist also eine Vereinigung von Intervallen mit endlicher Summe der Längen, also endlichem Maß.

9.4 Beispiel: Produktformel für sin

Aus Satz 9.8 folgt dass es eine Darstellung

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = e^{p(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} E_1(z/n)$$

mit p Polynom vom Grad ≤ 1 gibt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} E_1(z/n) &= \prod_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} E_1(z/n) E_1(z/(-n)) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) \exp(z/n)(1 + z/n) \exp(-z/n) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).
\end{aligned}$$

Sei nun

$$F(z) := e^{p(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Dann gilt

$$\partial_z F(0) = e^{p(0)}, \quad \partial_z^2 F(0) = e^{p(z)} p'(0).$$

Da $F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$, folgt daraus $p(0) = p'(0) = 0$. Da p ein Polynom von Grad ≤ 1 ist, verschwindet p indentisch. Damit haben wir die folgende Aussage gezeigt:

Lemma 9.10 (Produktformel für sin)**.** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}). \tag{9.4}$$

Mit $z = 1/2$ liefert (9.4) das Wallisprodukt:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1/4}{n^2}) = \frac{1}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}.$$

Wenn wir (9.4) nach z ableiten, bekommen wir

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) + \sum_{k=1}^{\infty} z(-\frac{2z}{k^2}) \prod_{1 \leq n \neq k} (1 - \frac{z^2}{n^2}),$$

und damit

$$\begin{aligned}
\pi \cot(\pi z) &= \cos(\pi z) \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{2z}{k^2}) (1 - \frac{z^2}{k^2})^{-1} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}).
\end{aligned}$$

9.5 Beispiel: Produktformel für Γ

Γ ist keine ganze Funktion, aber $1/\Gamma$ ist es. Um den Hadamardschen Faktorisierungssatz anwenden zu können, müssen wir die Wachstumsordnung von $1/\Gamma$ bestimmen.

Lemma 9.11. *Es gibt $c > 0$ so dass für alle $z \in \mathbb{C}$, mit $|z| > c$ gilt*

$$\left|\frac{1}{\Gamma(z)}\right| \leq ce^{c|z|\ln|z|}. \tag{9.5}$$

Beweis. Aus der Funktionalgleichung (8.4) und Lemma 8.9 folgt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\Gamma(1-z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\int_1^\infty e^{-t}t^{-z}dt \tag{9.6}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir schätzen jetzt die zwei Terme getrennt ab. Aus $\sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2$ folgt $|\sin w| \leq e^{|w|}$.

Es gilt

$$\Big|\sum_{n\geq 0, |n+1-z|\geq 1/2}\frac{(-1)^n}{n!(n+1-z)}\Big| \leq \sum_{n\geq 0, |n+1-z|\geq 1/2}\frac{1}{n!(1/2)} = 2e.$$

Es gibt höchstens ein $n \geq 0$ mit $|n+1-z| < 1/2$, und da $\sin((n+1)\pi) = 0$ folgt, dass $\sin(\pi z)/(n+1-z)$ auf $B_{1/2}(n+1)$ beschänkt ist. Damit haben wir den ersten Term in (9.6) abgeschätzt.

Jetzt betrachten wir den zweiten Term. Sei $n = \lceil |z| \rceil \in \mathbb{N}$. Dann

$$\begin{aligned}\Big|\int_1^\infty e^{-t}t^{-z}dt\Big| &\leq \int_1^\infty e^{-t}t^n dt \leq \int_0^\infty e^{-t}t^n dt \\ &= \Gamma(n+1) = n! \leq n^n \leq e^{(|z|+1)\ln(|z|+1)}.\end{aligned}$$

□

Lemma 9.12. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}.$$

Beweis. Nach Korollar 8.6 hat $1/\Gamma$ einfache Nullstellen in $-\mathbb{N}$ und keine weiteren Nullstellen. Aus Satz 9.8 folgt dass

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{p(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}E_1(z/(-n)) = e^{p(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$$

mit einem linearen Polynom p. Aus der Funktionalgleichung 8.2 ($z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$) folgt

$$1 = \Gamma(1) = \operatorname{res}_0\Gamma = \Big(e^{p(0)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{0}{n})e^{-0/n}\Big)^{-1} = e^{-p(0)},$$

sodass oBdA $p(0) = 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}1 = \frac{1}{\Gamma(1)} &= e^{p(1)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})e^{-1/n} = e^{p(1)}\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) - 1/n\Big). \\ &= e^{p(1)}\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n)\Big) \\ &= e^{p(1)}\exp(-\gamma),\end{aligned}$$

sodass $p(1) = \gamma + 2\pi ik$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da $\Gamma(z) \in \mathbb{R}$ für $z > 0$, muss $k = 0$ sein. □

10 Spektraltheorie

Sei $A = (a_{i,j})$ eine $m \times m$-Matrix mit komplexen Einträgen. Ihre *Operatornorm (auf ℓ^2)* ist definiert durch

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^m, \|x\| \le 1} \|Ax\| = \inf\{C : \forall x \in \mathbb{C}^m \; \|Ax\| \le C\|x\|\},$$

wobei $\|x\| = \big(\sum_{j=1}^m |x_j|^2\big)^{1/2}$ die Euklidische Norm ist. Alles in diesem Kapitel gilt auch für lineare Abbildungen auf allgemeinen komplexen Banachräumen, wir beschränken und aber auf den Fall von endlichdimensionalen Matrizen. Dieser Fall hat z.B. den Vorteil die Links- und Rechtsinverse übereinstimmen.

Wir bezeichnen mit e_j den j-ten Einheitsvektor. Es gilt

$$\|A\| \ge \|Ae_j\| = \|A_{\cdot,j}\|,$$

wobei die letztere Norm die Euklidische Norm der j-ten Spalte von A ist. Andererseits folgt aus der Dreiecksunglichung und der Hölderungleichung

$$\|Ax\| = \|\sum_j x_j \cdot Ae_j\| \le \sum_j |x_j| \|A_{\cdot,j}\| \le \big(\sum_j |x_j|^2\big)^{1/2} \big(\sum_j \|A_{\cdot,j}\|^2\big)^2 = \|x\| \big(\sum_{k,j} |A_{k,j}|^2\big)^{1/2}.$$

Die letzte Klammer wird übrigens als die *Hilbert–Schmidt-Norm* von A bezeichnet. Wir sehen also dass die Operatornorm mit anderen Normen auf dem Matrizenraum vergleichbar ist:

$$\max_j \big(\sum_k |A_{k,j}|^2\big)^{1/2} \le \|A\| \le \big(\sum_{k,j} |A_{k,j}|^2\big)^{1/2}.$$

Es gibt i.A. keine direktere Formel für die Operatornorm, sie hat aber den Wichtigen Vorteil nicht nur subadditiv und homogen, sondern auch submultiplikativ zu sein:

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \quad \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Wir zeigen diese 3 Eigeschaften. Subadditivität: Sei $\|x\| \le 1$. Dann gilt

$$\|(A + B)x\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| + \|B\|.$$

Homogenität: Sei $\|x\| \le 1$. Dann gilt

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda| \|Ax\| \le |\lambda| \|A\|.$$

Daraus folgt $\|\lambda A\| \le |\lambda| \|A\|$, und mit λ^{-1} an Stelle von λ folgt auch $\ge$.

Submultiplikativität:

$$\|ABx\| \le \|A\| \|Bx\| \le \|A\| \|B\| \|x\|.$$

Lemma 10.1. *Seien A, B Matrizen, A invertierbar, und $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Dann gilt*

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (BA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1}.$$

Beweis. Aus der Submultiplikativität der Operatornorm folgt

$$\|(BA^{-1})^n\| \le \|BA^{-1}\|^n \le (\|B\| \|A^{-1}\|)^n,$$

sodass die erste Reihe in der Operatornorm absolut konvergiert (insbesondere konvergiert jede Komponente dieser Reihe absolut). Da die Reihe konvergiert, können wir die Multiplikation mit A^{-1} hineinziehen und das Assoziativgesetz für die Matrixmultiplikation benutzen um die zweite Reihe zu erhalten. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}(A - B)A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (BA^{-1})^n &= (1 - BA^{-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (BA^{-1})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (BA^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (BA^{-1})^{n+1} = (BA^{-1})^0 = \mathrm{Id}. \quad \square\end{aligned}$$

Definition 10.2. *Das* Spektrum *einer Matrix A ist die Menge*

$$\sigma(A) := \{z \in \mathbb{C} : z - A \text{ nicht invertierbar}\}.$$

Die Resolventenabbildung *ist für $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ definiert als*

$$R(z, A) := (z - A)^{-1}.$$

Korollar 10.3. *Das Spektrum ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die Resolventenabbildung ist analytisch (d.h, lokal als Potenzreihe darstellbar).*

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < \|R(z, A)\|^{-1}$. Dann gilt nach Lemma 10.1

$$(z - A + w)^{-1} = (z - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} ((-w)(z - A)^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n R(z, A)^{n+1}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut in der Operatornorm. Insbesondere gilt $z + w \notin \sigma(A)$. □

Aus Lemma 10.1 folgt außerdem dass, für $|\lambda| > \|A\|$,

$$(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (A\lambda^{-1})^n,$$

sodass insbesondere

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n |\lambda|^{-n-1} = \frac{|\lambda|^{-1}}{1 - (\|A\|/|\lambda|)} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}. \tag{10.1}$$

Der *Spektralradius* von A ist $r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Aus der obigen Rechnung folgt $r(A) \leq \|A\|$. Außerdem ist $\sigma(A) \neq \emptyset$, da $R(\lambda, A)$ sonst eine beschränkte ganze Funktion wäre.

10.1 Dunford–Riesz–Kalkül

Satz 10.4. *Sei $\sigma(A) \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, Ω offen, γ ein geschlossener Integrationsweg in $\Omega \setminus \sigma(A)$ sodass für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $n_{\gamma,\lambda} = 1$. Für eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei*

$$\Phi(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) R(z, A) dz.$$

Dann gilt

(i) $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ und $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ für alle $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) $\Phi(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}$, $\Phi(\mathbf{z}) = A$, wobei die Funktionen $\mathbf{1}, \mathbf{z}$ durch $\mathbf{1}(z) = 1$ und $\mathbf{z}(z) = z$ gegeben sind.

(iii) Für beliebige f, g gilt $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

Bemerkung. Wenn A ein Skalar ist, dann folgt aus der Cauchy–Integralformel dass $\Phi(f) = f(A)$.

Beweis. Für jedes genügend große r haben wir

$$\Phi(\mathbf{1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(z, A) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} R(z, A) dz.$$

Weitehin ist

$$R(z,A)=\frac{\mathrm{Id}}{z}+\frac{AR(z,A)}{z}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Id}-\Phi(\mathbf{1})\| &= \Big\|\mathrm{Id}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} R(z,A)dz\Big\| \\
&= \Big\|\mathrm{Id}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{\mathrm{Id}}{z}+\frac{AR(z,A)}{z}dz\Big\| \\
&= \Big\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r} \frac{AR(z,A)}{z}dz\Big\| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|AR(re^{i\theta},A)\|d\theta \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|A\|\frac{1}{r-\|A\|}d\theta \to 0
\end{aligned}$$

wenn $r\to\infty$, wobei wir (10.1) benutzt haben. Also ist $\Phi(\mathbf{1})=\mathrm{Id}$.

Wir berechnen $\Phi(\mathbf{z})$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma zR(z,A)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)R(z,A)+AR(z,A)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{Id}+AR(z,A)dz \\
&= A\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(z,A)dz \\
&= A\Phi(\mathbf{1})=A.
\end{aligned}$$

Um die Multiplikativität von Φ zu zeigen benutzen wir die Resolventenidentität

$$R(\lambda,A)-R(\mu,A)=(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{C}\setminus\sigma(A). \tag{10.2}$$

Die Identität (10.2) impliziert insbesondere dass $R(\lambda,A)$ und $R(\mu,A)$ kommutieren. Man zeigt (10.2) indem man von links mit $(\lambda-A)$ multipliziert:

$$(\lambda-A)(R(\lambda,A)-R(\mu,A))=\mathrm{Id}-(\mu-A+(\lambda-\mu))R(\mu,A)=(\mu-\lambda)R(\mu,A),$$

und

$$(\lambda-A)(\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)=(\mu-\lambda)R(\mu,A).$$

Sei nun γ' ein Integrationsweg der $(\Omega\setminus\sigma(A))$-homotop zu γ ist, γ,γ' disjunkte Bilder haben, und $n_{\gamma',w}=1$ für alle w im Bild von γ. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(f)\Phi(g) &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma f(z)R(z,A)dz\int_{\gamma'} g(z')R(z',A)dz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} f(z)g(z')\frac{R(z,A)-R(z',A)}{z'-z}dz'dz \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} f(z)g(z')\frac{R(z,A)}{z'-z}dz'dz+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma'}\int_\gamma f(z)g(z')\frac{R(z',A)}{z'-z}dzdz' \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)g(z)R(z,A)dz+0=\Phi(fg).
\end{aligned}$$

□

10.2 Jordan–Normalform

Im endlichdimensionalen Fall ist $\sigma(A)$ die Nullstellenmenge des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda\mathrm{Id} - A)$, und insbesondere endlich. Sei $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Sei $\gamma_j = \partial B_\epsilon(\lambda_j)$ für ein kleines ϵ und

$$\Phi_j(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} f(z)R(z,A)dz.$$

Der obige Beweis ergibt dann folgende Aussagen:

$$\Phi_j(f)\Phi_l(g) = \begin{cases} \Phi_j(fg), & j = l, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie $\sum_j \Phi_j(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}$, $\sum_j \Phi_j(\mathbf{z}) = A$. Insbesondere sind die Matrizen $P_j := \Phi_j(\mathbf{1})$ idempotent: $P_j^2 = P_j$, $P_jP_l = P_lP_j = 0$ für $j \neq l$, und

$$\mathrm{Id} = \sum_j P_j.$$

Sei $X_j := \mathrm{Bild}(P_j)$. Sei $Ax = \lambda_j x$ ein Eigenvektor. Dann gilt

$$P_jx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R(z,A)xdz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{x}{z-\lambda_j}dz = x,$$

sodass X_j den Eigenraum zum Eigenwert λ_j enthält. Da A und P_j kommutieren, gilt $A(X_j) \subseteq X_j$. Außerdem ist $\lambda_j - A$ auf X_j eine nilpotente Matrix, weil

$$\begin{aligned}(\lambda_j - A)^nP_j = \Phi(\mathbf{1}\lambda_j - \mathbf{z})^n\Phi_j(\mathbf{1}) = \Phi_j((\mathbf{1}\lambda_j - \mathbf{z})^n)& \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}(\lambda_j - z)^nR(z,A)dz = 0&\end{aligned}$$

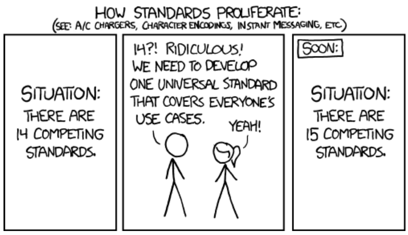
für genügend große n, weil $R(\cdot, A)$ in λ_j einen Pol endlicher Ordnung hat (weil $R(\lambda, A) = \det(\lambda - A)^{-1}\cdot P(\lambda - A)$ mit einem Polynom P ist). Aus diesen Informationen lässt sich die Jordan–Normalform von A gewinnen.

11 Fraktionale Integrale

Definition 11.1. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine glatte Funktion die auf* $(-\infty, y_0)$ *verschwindet. Für* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *definiert man* fraktionale (Weyl)-Integrale

$$I_+^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy. \tag{11.1}$$

Vorsicht: die englischsprachige Wikipedia listet aktuell 16 weitere Operatorenfamilien auf, die auch “fraktionale Integrale” genannt werden.



Die Bezeichnung „fraktionale Integrale“erklärt sich wie folgt. Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt

$$\partial I_+^1 f = f.$$

Für andere α haben wir die folgende Aussage.

Lemma 11.2. *Se* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Dann gilt*

$$\partial I_+^{\alpha+1} f = I_+^\alpha f. \tag{11.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_x I_+^{\alpha+1} f(x) &= \Gamma(\alpha+1)^{-1} \partial_x \int_{-\infty}^x (x-y)^\alpha f(y)dy \\
&= \Gamma(\alpha+1)^{-1}(x-x)^\alpha f(x) + \Gamma(\alpha+1)^{-1} \int_{-\infty}^x \partial_x (x-y)^\alpha f(y)dy \\
&= \Gamma(\alpha+1)^{-1} \int_{-\infty}^x \alpha(x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} I_+^\alpha f(x) = I_+^\alpha f(x).
\end{aligned}$$

□

Ein weiterer Grund für den Normierungsfaktor $\Gamma(\alpha)^{-1}$ in (11.1) ist die folgende Aussage.

Lemma 11.3. *Für* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *und* $\operatorname{Re}\beta > 0$ *gilt*

$$I_+^\alpha I_+^\beta f = I_+^{\alpha+\beta} f.$$

Um Lemma 11.3 zu zeigen benutzen wir eine weitere spezielle Funktion.

Definition 11.4. *Die* Betafunktion *ist definiert durch*

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0.$$

Lemma 11.5. *Für* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$ *gilt*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{11.3}$$

Beweis. Mit dem Variablenwechsel $(s,t) = (ur, u(1-r))$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-t-s}dtds \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty (ur)^{\alpha-1}(u(1-r))^{\beta-1}e^{-u}\left|\det\begin{pmatrix} r & 1-r \\ u & -u\end{pmatrix}\right|dudr \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}u^{\alpha-1+\beta-1}e^{-u}|-ur-(1-r)u|dudr \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}u^{\alpha+\beta-1}e^{-u}dudr \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}dr \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

□

Korollar 11.6. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$B(z,w)\cdot B(z+w, 1-w) = \frac{\pi}{z\sin(\pi w)}.$$

Beweis. Aus (11.3) und den Funktionalgleichungen (8.2) und (8.4) folgt

$$B(z,w)\cdot B(z+w,1-w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\frac{\Gamma(z+w)\Gamma(1-w)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma(w)\Gamma(1-w)}{z} = \frac{\pi}{z\sin(\pi w)}.$$

□

Beweis von Lemma 11.3. Es gilt

$$\begin{aligned} I_+^\alpha I_+^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1}(I_+^\beta f)(y)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x (x-y)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^y (y-y')^{\beta-1}f(y')dy'dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{y'=-\infty}^x \int_{y=y'}^x (x-y)^{\alpha-1}(y-y')^{\beta-1}dyf(y')dy' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{y'=-\infty}^x \int_{t=0}^1 ((x-y')(1-t))^{\alpha-1}((x-y')t)^{\beta-1}(x-y')dtf(y')dy' \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{y'=-\infty}^x (x-y')^{\alpha-1}(x-y')^{\beta-1}(x-y')f(y')dy' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{y'=-\infty}^x (x-y')^{\alpha+\beta-1}f(y')dy' \\ &= I_+^{\alpha+\beta}f(x).\end{aligned}$$

□

Aus der Definition folgt dass $I_+^\alpha f(x)$ eine holomorphe Funktion von α für $\operatorname{Re}\alpha > 0$ ist. Wir setzen diese Funktion zu einer meromorphen Funktion von $\alpha \in \mathbb{C}$ fort. Die Idee ist ähnlich zu Lemma 8.9, wo wir eine Formel für Γ die auf ganz $\mathbb{C}$ gilt gezeigt haben.

Um die Notation zu vereinfachen betrachten wir $x = 0$. Wir schreiben

$$I_+^\alpha f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{-1}(-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{-0}(-y)^{\alpha-1}f(y)dy.$$

Das erste Integral macht für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$ Sinn, sodass wir nur das zweite betrachten müssen. Dafür verwenden wir die Taylorformel mit Rest:

$$f(y) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!}y^n + R_N(y),$$

wobei $|R(y)| \leq C_N|y|^{N+1}$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{0}(-y)^{\alpha-1}f(y)dy &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{0}(-y)^{\alpha-1}\Big(\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}y^n + R_N(y)\Big)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_{-1}^{-0}(-y)^{\alpha-1}y^n dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{0}(-y)^{\alpha-1}R_N(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{0}(-y)^{\alpha-1}R_N(y)dy.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral macht für $\operatorname{Re}\alpha > N+1$ Sinn. Nun erinnern wir uns daran dass Γ einfache Pole in $-\mathbb{N}$ hat und nach (8.3) gilt $\operatorname{res}_{-n}\Gamma = (-1)^n/n!$. Also definiert der obige Ausdruck eine meromorphe Funktion für $\operatorname{Re}\alpha > N+1$. Außerdem gilt

$$I_+^{-n}f(0) = \lim_{\alpha\to -n}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{n+\alpha} = \frac{1}{\operatorname{res}_{-n}\Gamma}\frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!} = f^{(n)}(0).$$

Wir sehen also dass die fraktionalen Integrale negativer ganzzahliger Ordnung genau die Ableitungen sind. Für die obige Rechnung haben wir außerdem lediglich C^{N+1}-Regularität von f benutzt.

Für $-1 < \alpha < 0$ haben wir insbesondere

$$I^\alpha f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{-1}(-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{f(0)}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{0}(-y)^{\alpha-1}(f(y)-f(0))dy. \tag{11.4}$$

Man kann die Identität (11.2) per analytischer Fortsetzung in einem geeigneten Funktionenraum für alle α zeigen. Wir machen das in einem Teilbereich von Hand.

Lemma 11.7. *Sei $-1 < \operatorname{Re}\alpha < 0$. Dann gilt*

$$\partial I_+^{\alpha+1}f = I_+^\alpha f.$$

Beweis. Die rechte Seite haben wir in (11.4) bereits berechnet. Nun berechnen wir die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\partial I_+^{\alpha+1}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_x\int_{-\infty}^{x-\epsilon}(x-y)^\alpha f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\partial_x\int_0^\epsilon y^\alpha f(x-y)dy \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{-\infty}^{x-\epsilon}(x-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha f(x-\epsilon) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\epsilon y^\alpha f'(x-y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x-\epsilon}(x-y)^{\alpha-1}f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha f(x-\epsilon) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\epsilon y^\alpha f'(x-y)dy.
\end{aligned}$$

Mit (11.4) bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\partial I_+^{\alpha+1}f(x) - I_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\epsilon^1 y^{\alpha-1}f(x-y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\epsilon^\alpha f(x-\epsilon) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\epsilon y^\alpha f'(x-y)dy - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{f(x)}{\alpha} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 y^{\alpha-1}(f(x-y)-f(x))dy \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\epsilon^1 y^{\alpha-1}f(x)dy + \frac{\epsilon^\alpha f(x-\epsilon)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\epsilon y^\alpha f'(x-y)dy - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\epsilon y^{\alpha-1}(f(x-y)-f(x))dy.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile geht $\to 0$ wenn $\epsilon \to 0$ weil die Integranden absolut integrierbar sind. Die vorletzte Zeile ist

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\Big[\frac{y^\alpha}{\alpha}\Big]_\epsilon^1 + \frac{\epsilon^\alpha f(x-\epsilon)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(1-\epsilon^\alpha) + \frac{\epsilon^\alpha f(x-\epsilon)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{\epsilon^\alpha (f(x-\epsilon) - f(x))}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0
\end{aligned}$$

wenn $\epsilon \to 0$. $\square$