S2D3 – Hauptseminar Differentialtopologie – Morse-Theorie
S4D2 – Graduate Seminar on Topology – Morse Theory

Martin Palmer-Anghel // Sommersemester 2018 // Di 12 Uhr (c.t.), Seminarraum 1.008

Zusammenfassung. Die Ziele dieses Seminars sind folgende.

- Eine wichtige und oft benutzte Methode der Differentialtopologie einzuführen: die Morse-Theorie. Die Grundidee ist, dass, wenn wir eine ausreichend gute Funktion f auf einer Mannigfaltigkeit M haben, dann ist die Topologie von M in den singulären (kritischen) Punkten von f "konzentriert", und wir können Informationen über die Mannigfaltigkeit aus diesen Singularitäten herausziehen.
- Diese Theorie zu benutzen, um das h-Kobordismustheorem zu beweisen: jeder einfach zusammenhängende h-Kobordismus von Dimension mindestens 6 ist trivial (von der Form $M \times [0, 1]$). Ein einfaches Korollar ist die (topologische) Poincaré-Vermutung in höheren Dimensionen. Ein anderes Korollar ist der hochdimensionale glatte Satz von Schoenflies.
- Die grobe Idee des Beweises ist folgende. Jeder Kobordismus besitzt eine Morsefunktion mit endlich vielen kritischen Punkten. Wenn es *keine* kritische Punkte gibt, ist der Kobordismus trivial. Der Beweis besteht deshalb darin, eine gegebene Morsefunktion zu verändern, so dass alle kritische Punkte entfernt werden, indem sie sich in Paaren gegenseitig löschen, bis keine mehr übrig bleiben. Der wichtigste technische Schritt ist diese paarweise gegenseitige Löschung von kritischen Punkten mithilfe des sogenannten Whitney-Tricks.
- Am Ende werden wir auch kurz die *glatte* Poincaré-Vermutung in höheren Dimensionen besprechen – welche *falsch* ist. Da die topologische PV wahr und die glatte PV falsch ist (in höheren Dimensionen), gibt es exotische glatte Strukturen auf S^n, wenn n groß ist ($n \geqslant 7$).

Die Ziele dieses Seminars sind etwas ehrgeizig, aber das h-Kobordismustheorem ist ein Höhepunkt der klassischen Differentialtopologie, also sollte es der Mühe wert sein für diejenigen, denen dieses Thema gefällt.

Vorbereitung Ihres Vortrags. Die Ideen der meisten Schritte des Beweises sind an vielen Stellen sehr geometrisch, also sollten Sie versuchen, die Grundideen mit anschaulichen Bildern zu erklären und zu unterstützen, wenn möglich. Die Beweise sind auch an manchen Stellen ziemlich ausführlich, also ein Teil der Vorbereitung ist es, den roten Faden dafür zu finden. Es sollte ein Gleichgewicht geben zwischen (a) das große Ganze im Auge behalten (und sich nicht zu sehr in den Details verlaufen) und (b) alle notwendigen Ideen zu erklären, ohne die schwierigeren technischen Ergebnisse zu überspringen, die für den Beweis wichtig sind. Ihr Vortrag sollte eine klare Gesamtstruktur haben.

Sie sollten das Thema Ihres Vortrags spätestens zwei Wochen im Voraus mit mir besprechen, zu welcher Zeit Sie schon einen Gesamtplan Ihres Vortrags haben sollten. Meine Sprechstunden werden später festgelegt werden (siehe die Webseite des Seminars).

Quellen. Die Hauptquelle(n) bestimmen, worum es in Ihrem Vortrag geht, während die anderen Quellen da sind, falls sie Ihnen mit der Vorbereitung helfen – aber sie sind vollkommen fakultativ (insbesondere für die ersten Vorträge, für die es viele Quellen gibt).

Ihr Vortrag sollte 90 Minuten dauern, inklusive genügend Zeit für Fragen zwischendurch (also planen Sie $\sim$75 Minuten).

Webseite. www.math.uni-bonn.de/people/palmer/Morse.html

Voraussetzungen für das Seminar.

- **Algebraische Topologie:** Der Kurs *Topology I*, Wintersemester 17/18.
- Wir werden außerdem ein bisschen des Kurses *Topology II*, Sommersemester 2018, benutzen (aber nicht viel, nämlich Kohomologie und Poincaré-Dualität).
  Lehrbuchreferenz: [A. Hatcher, *Algebraic topology*, (Link zur pdf-Datei)].
- Einige Grundkonzepte der Differentialtopologie. Der Kurs *Global Analysis I*, Wintersemester 17/18 wäre z.B. nützlich, aber ist auf jeden Fall keine entscheidende Voraussetzung.
  (Hier sind die Notizen + zusätzliche Notizen zu Flüssen dieses Kurses.)
  Lehrbuchreferenzen: die Bücher
  - J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds.*
  - J. M. Lee, *Riemannian manifolds – an introduction to curvature.*

  waren die empfohlene Literatur zu *Global Analysis I.* Ebenfalls empfohlen sind:
  - V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology.*
  - M. Hirsch, *Differential topology.*
  - A. Kosinski, *Differential manifolds.*

Kurzbeschreibungen der Vorträge.

1. Morsefunktionen. (10.04) (*Sprecher:* **Lukas Bonfert**)
Die Definition und die lokale Struktur von Morsefunktionen auf glatten Mannigfaltigkeiten, und allgemeiner auf Triaden von glatten Mannigfaltigkeiten. Die Existenz (und Beispiele) von Morsefunktionen. Die *Morsezahl* einer Triade von Mannigfaltigkeiten.
Hauptquelle. [M^h, §2 und ein Teil von §1], [M^m, §2]
Andere Quellen. [Mat, §2.2], [Ko, §IV.3–4] [Nic, §1.1 und §1.2], [AD, §1]

2. Kobordismen I. (17.04) (*Sprecher:* **Jonas Cremer**)
Kobordismen, Gradientenvektorfelder (oder *Gradientenartigvektorfelder*), Kobordismen mit Morsezahl 0, Subadditivität der Morsezahl von Kobordismen (Korollar 3.8).
Hauptquelle. [M^h, §1 und §3 bis Seite 26]
Andere Quellen. [M^m, §3], [Mat, §2.3], [Ko, §I.7] [Nic, §2.2], [AD, §2.1]

3. Kobordismen II. (24.04) (*Sprecher:* **Branko Juran**)
Chirurgie, elementare Kobordismen, der Fundamentalsatz der Morsetheorie (Sätze 3.12 und 3.13 von [M^h]), die Existenz von Henkel-Zerlegungen.
Hauptquellen. [M^h, §3 Seiten 27–36], [Mat, Theorem 3.4]
Andere Quellen. [M^m, §3], [Mat, §3.1], [Ko, §VI.9 und §VII.1–2] [Nic, §2.2], [AD, §2.1]

4. Umordnung von Kobordismen (alias Henkel-Gleiten). (08.05)
(*Sprecher:* **Christian Nöbel**)
Veränderung von Gradientenartigvektorfelder für eine gegebene Morsefunktion. Veränderung einer gegebenen Morsefunktion so dass sie selbst-indizierend ist.
Hauptquelle. [M^h, §4]
Andere Quellen. [Mat, §3.3], [Nic, Theorem 2.4.11], [AD, §2.2]

5. Morse-Homologie. (15.05) (*Sprecher:* **Robin Stoll**)
Der Satz von Reeb über die Sphäre. Morse-Homologie, mit zwei Anwendungen: die Ungleichungen von Morse und die Poincaré-Lefschetz-Dualität.
Hauptquellen. [M^m, §4], [M^h, Lemma 6.3 auf Seite 69 sowie §7 bis Seite 92], [Ko, §VII.4]
Andere Quellen. [Mat, §4.2], [Ko, §VI.10, §VII.3, §VII.5], [Nic, §2.3], [Hut, §2–3], [AD, §3–4]

6. Paarauslöschung von kritischen Punkten I. (29.05) (*Sprecher:* **Niklas Hellmer**)
Noch ein Lemma über die Veränderung von Gradientenartigvektorfelder für eine gegebene Morsefunktion. Der Beweis von Theorem 5.4 (*First Cancellation Theorem*), *angenommen*, dass Behauptung 6 auf Seite 55 wahr ist.
Hauptquelle. [M^h, §5 bis Seite 55]
Andere Quellen. [Mat, §3.4, insbesondere Theorem 3.28]

7. Paarauslöschung von kritischen Punkten II. (05.06) (*Sprecher:* **Carsten Uhlig**)
Der Beweis von Behauptung 6, mithilfe des technischen Theorem 5.6 über Einbettungen von euklidischen Räumen.
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §5 Seiten 56–66]

8. Paarauslöschung von kritischen Punkten III (der Whitney-Trick I). (12.06)
(*Sprecher:* **Jonas Antor**)
Theorem 6.4 (*Second Cancellation Theorem*) ist eine Verallgemeinerung des *First Cancellation Theorem*, wobei die Hypothese von *geometrischem* Schnitt in einem einzigen Punkt auf eine Hypothese von *algebraischem* Schnitt gleich ± 1 abgeschwächt wird.
Beweis dieses Satzes, *angenommen*, dass Theorem 6.6 (der Whitney-Trick) wahr ist. Dann einen Beweis von Theorem 6.6, *angenommen*, dass Lemma 6.7 wahr ist.
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §6 bis Seite 74]
Andere Quellen. [Sc, §1.5 und Seiten 54–57]

9. Paarauslöschung von kritischen Punkten IV (der Whitney-Trick II). (19.06)
(*Sprecher:* **Lennart Ronge**)
Beweis von Lemma 6.7. Damit ist der Beweis des Whitney-Tricks sowie des *Second Cancellation Theorem* fertig.
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §6 Seiten 73–84]
Andere Quellen. [Sc, §1.5 und Seiten 54–57]

10. Entfernung von kritischen Punkten in den mittleren Dimensionen. (26.06)
(*Sprecher:* **Ferdinand Wagner**)
Beweis des *Basis Theorem* (7.6). Dann beweisen Sie, dass für eine Morsefunktion f auf einem einfach zusammenhängenden h-Kobordismus von Dimension $n \geqslant 6$ alle kritischen Punkte von f mit Index $\neq 0, 1, n-1, n$ durch Paarauslöschung entfernt werden können (Satz 7.8).
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §7 Seiten 92–99]
Andere Quellen. [Sc, §1.6]

11. Entfernung von kritischen Punkten in den extremalen Dimensionen. (03.07)
(*Sprecher:* **Lars Munser**)
Beweisen Sie, dass kritische Punkte mit Index $0, 1, n-1, n$ auch durch Paarenauslöschung entfernt werden können, indem wir gegebenenfalls zusätzliche kritische Punkte kreieren (Satz 8.1). Folgern Sie das h-Kobordismus Theorem (Satz 9.1), sowie Satz 9.2.
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §8 und Seiten 107–108]
Andere Quellen. [Sc, §1.6], [Ko, §VIII.3]

12. Die Poincaré-Vermutung und der Satz von Schoenflies. (10.07)
(*Sprecher:* **Dídac Violan Arís**)
Beweisen Sie, mithilfe des h-Kobordismus Theorems, die Sätze A, B, C und D in §9 von [$\mathrm{M^h}$]. (Beschreiben Sie auch, ohne Beweis, die zusätzlichen Resultate von Kervaire-Milnor, Cerf/Palais und Brown die Sie dafür auch brauchen.)
Hauptquelle. [$\mathrm{M^h}$, §9]

13. Einführung in die exotischen Sphären. (17.07)
(*Sprecher:* **Xiaowen Dong** und **Tobias Fleckenstein**)
Führen Sie die Gruppe Θ_n von *Homotopie-n-Sphären* ein, und zeigen Sie, dass sie eine abelsche Gruppe ist. Erklären Sie die Verbindung mit der glatten Poincaré-Vermutung. Dann eine kurze Übersicht über das, was über diese Gruppe bekannt ist, einschließlich der Tatsachen, dass (a) sie oft *nicht trivial* ist (ab $n = 7$), aber (b) sie zumindest *endlich* ist.
Hauptquelle. [KM]
Andere Quellen. [Le], [Ko, §X], [$\mathrm{M^7}$]

Quellen.

- [M^{h}] = **J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem.*** (Hauptquelle für das Seminar.)

- [AD] = M. Audin, M. Damian, *Théorie de Morse et homologie de Floer.*
- [Hut] = M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology.*
- [KM] = M. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres.*
- [Ko] = A. Kosinski, *Differential manifolds.*
- [Le] = J. P. Levine, *Lectures on groups of homotopy spheres.*
- [Mat] = Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory.*
- [M^7] = J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.*
- [M^{m}] = J. Milnor, *Morse Theory.*
- [Nic] = L. Nicolaescu, *An invitation to Morse theory.*
- [Sc] = A. Scorpan, *The wild world of 4-manifolds.*