Analysis 3

20.11.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 27.11.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Fubini **2 + 4 + 4 = 10 Punkte**

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ das Integral

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}m^d(x).$$

Hierbei ist χ_A die Indikatorfunktion der Menge A.

(a) $f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}$ und $A := [1,2]^2$, wobei $d = 2$.

(b) $f(x) = x_1^3x_2 + \cos(x_1^2)$, $A := \{(x_1,x_2)^\top\colon\ 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq \sqrt{\pi/2}\}$, wobei $d = 2$.

(c) $f(x) = \chi_A(x)$ (die Indikatorfunktion von A), wobei $A := \{(x_1,x_2,x_3)^\top \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$ und $d = 3$. Wie sieht die Menge A aus?

Aufgabe 2: **5 + 5 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini $m^d(K)$, wobei

(a) $K := \{(x_1, ..., x_d)^\top \in \mathbb{R}^d\colon\ x_1^2 + ... + x_d^2 \leq 1,\ x_d \geq 0\}$ die obere Einheitshalbkugel im $\mathbb{R}^d$ ist,

(b) $K := \{(x_1, ..., x_d)^\top \in \mathbb{R}^d\colon\ x_1, ..., x_d \geq 0,\ \ x_1 + ... + x_d \leq 1\}$ das Standardsimplex in $\mathbb{R}^d$ ist.

Aufgabe 3: Fubini **10 Punkte**

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt mit $m^d(K) > 0$, wobei wie gewöhnlich m^d das d-dimensionale Lebesguemaß bezeichne. Sei $f\colon K \to \mathbb{R}^+$ eine positive, stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(m^d(K))^2 \leq \Big(\int_K f\,\mathrm{d}m^d\Big)\Big(\int_K \frac{1}{f}\,\mathrm{d}m^d\Big).$$

Nützen Sie hierbei Fubini geschickt auf einem geeigneten Produktraum.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Sei $0 \leq s < d$ und $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann für

$$\Sigma_f^s := \left\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ \limsup_{r\searrow 0} \frac{1}{r^s}\int_{\mathrm{B}_r(x)} |f|\,\mathrm{d}m^d > 0\right\}$$

$\mathcal{H}^s(\Sigma_f^s) = 0$ gilt und schlussfolgern Sie $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_f^s) \leq s$. Hierbei ist $\dim_{\mathcal{H}}$ die auf Übungsblatt 5 eingeführte Hausdorffdimension.

Hinweis: Nützen Sie ähnliche Ideen wie im Beweis von Lemma 4.18.